12673

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

12673-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$, οπότε, $\frac{3}{\alpha}>\frac{3}{\beta}$. Επομένως, $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

β) Με $0<\alpha<\beta$ έχουμε $\alpha^3<\beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$$

που είναι το ζητούμενο.

12922

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

12922-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι η παράσταση $A = 0$, πρέπει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ που ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β)Είναι: $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, ισχύει σαν τετράγωνο αριθμού.

γ)$A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

13266

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

13266-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha+2)^2+1=\alpha^2+4\alpha+2^2+1=\alpha^2+4\alpha+5=A$$

β)

i. Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$A+B\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+2)^2+1+(2\beta+1)^2-1\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2\geq 0\,,$$

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα β)i) βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για

$$(\alpha+2)^2+(2\beta+1)^2=0$$

η οποία ισχύει για:

$$\{(\alpha+2)^2=0 \text{ και } (2\beta+1)^2=0\} \Leftrightarrow$$
$$\left\{\alpha=-2 \text{ και } \beta=-\frac{1}{2}\right\}.$$

13323

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x,\ y$ ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2=x^2+y^2-2x+8y+17\,.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

(Μονάδες 13)

13323-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε ευθεία απόδειξη. Έχουμε λοιπόν:

$(x-1)^2+(y+4)^2=(x^2-2x+1)+(y^2+8y+16)=x^2+y^2-2x+8y+17$.

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2+y^2-2x+8y+17=0 \overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$
$$(x-1)^2+(y+4)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2=0 \text{ και } (y+4)^2=0, \text{ δηλαδή}$$
$$x-1=0 \text{ και } y+4=0, \text{ οπότε τελικά}$$
$$x=1 \text{ και } y=-4.$$

14475

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

14475-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$$-4 \le \beta \le -3 \text{, οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \le \beta \cdot 2 \le -3 \cdot 2 \text{, και τελικά}$$

$$-8 \le 2\beta \le -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2-8 \le \alpha + 2\beta \le 4-6 \text{, οπότε τελικά}$$

$$-6 \le \alpha + 2\beta \le -2 .$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \le \alpha \le 4$ (1)

και

$-4 \le \beta \le -3$, οπότε πολ/ζουμε με (-1) τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \ge \beta \cdot (-1) \ge -3 \cdot (-1),$$

$$4 \ge -\beta \ge 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \le -\beta \le 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2+3 \le \alpha - \beta \le 4+4 \text{, οπότε τελικά}$$

$$5 \le \alpha - \beta \le 8 .$$

14492

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

14492-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $Π = 2x + 2y$. Τότε:

$4 \le x \le 7 \Leftrightarrow 2\cdot 4 \le 2x \le 2\cdot 7 \Leftrightarrow 8 \le 2x \le 14$ (1) και

$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 2\cdot 2 \le 2y \le 2\cdot 3 \Leftrightarrow 4 \le 2y \le 6$ (2)

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$8+ 4 \le 2x + 2y \le 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \le Π \le 20$.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$P = 2(x – 1) + 2\cdot 3y = 2x + 6y – 2$.Τότε:

$$2 \le y \le 3 \Leftrightarrow 6\cdot 2 \le 6y \le 6\cdot 3 \Leftrightarrow 12 \le 6y \le 18$$

$$\Leftrightarrow 12 – 2 \le 6y – 2 \le 18 – 2 \Leftrightarrow 10 \le 6y – 2 \le 16 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$8 + 10 \le 2x + 6y – 2 \le 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \le P \le 30$.

14602

ΘΕΜΑ 3

Αν $0<\alpha<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0<\alpha^3<\alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)

14602-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$0<\alpha<1 \overset{\cdot\alpha^2>0}{\Leftrightarrow}$$
$$0<\alpha^3<\alpha^2 \quad (1)$$

και

$$0<\alpha<1 \overset{\cdot\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$
$$0<\alpha^2<\alpha \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $0<\alpha^3<\alpha$.

β) Από το δεδομένο και το α) ερώτημα έχουμε $0<\alpha^3<\alpha<1$. Επιπλέον επειδή ο α είναι θετικός αριθμός, ομόσημος του 1 δηλαδή, έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha<1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\alpha}>1.$$

Τελικά $0<\alpha^3<\alpha<1<\dfrac{1}{\alpha}$.

14704

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

14704-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \leq x \leq 3$ και βρίσκουμε:

$$2+1 \leq x+y \leq 3+2 \Leftrightarrow 3 \leq x+y \leq 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \leq x \leq 3$ με 2 και βρίσκουμε: $4 \leq 2x \leq 6$. (1)

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \leq y \leq 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$-3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3 \ \ (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 \leq 2x-3y \leq 3 .$$

γ) Ισχύει ότι: $2 \leq x \leq 3$ (3) και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1.$ (4)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\frac{2}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3.$$

14713

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

(Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

i. $A=\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

ii. $A\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A=6$;

(Μονάδες 10)

14713-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=\alpha^2(\alpha+2)+9(\alpha+2)=(\alpha+2)(\alpha^2+9)$$

που είναι το ζητούμενο.

β) i. Ισχύει: $\alpha^2+2\alpha=\alpha(\alpha+2)$, οπότε με $\alpha>0$ έχουμε:

$$A=\frac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}=\frac{(\alpha^2+9)(\alpha+2)}{\alpha(\alpha+2)}=\frac{\alpha^2+9}{\alpha}$$

ii. Επειδή $\alpha>0$ για την απόδειξη της $A\geq 6$, δηλαδή της $\frac{\alpha^2+9}{\alpha}\geq 6$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\alpha^2+9\geq 6\alpha$, ή αρκεί $\alpha^2-6\alpha+9\geq 0$, που ισχύει αφού προκύπτει από την προφανή ανισότητα $(\alpha-3)^2\geq 0$.

Η ισότητα $A=6$ ισχύει μόνο όταν $(\alpha-3)^2=0$, δηλαδή μόνο όταν $\alpha=3$.

35040

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

35040-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$K - \Lambda = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3 - \beta) =$$
$$= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - (6\alpha - 2\alpha\beta) =$$
$$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$$
$$= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά ισχύει ότι:

$$K \geq \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0$$

το οποίο ισχύει για κάθε τιμή των α, β.

γ) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0 \text{ και } (\alpha - 3)^2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \text{ και } \alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = -\beta \text{ και } \alpha = 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ και } \beta = -3)$$

36899

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$.

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

(Μονάδες 13)

36899-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}$

$\alpha^2 + \alpha \cdot \dfrac{4}{\alpha} \geq 4\alpha$, οπότε

$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$, δηλαδή

$\alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$ και τελικά

$(\alpha - 2)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$ και ομοίως $\beta + \dfrac{4}{\beta} \geq 4$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δυο ανισότητες προκύπτει: $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

37179

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2a^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;

(Μονάδες 13)

37179-Λύση

Λύση

α) Ισχύουν:

$$\begin{gathered}K \geq \Lambda \Leftrightarrow \\ K-\Lambda \geq 0 \Leftrightarrow \\ 2a^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow \\ a^2+a^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow \\ \alpha^2+(\alpha-\beta)^2 \geq 0,\end{gathered}$$

η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Άρα $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

β) Εκτελώντας τις πράξεις όπως στο α ερώτημα έχουμε ότι:

$$\begin{gathered}K=\Lambda \Leftrightarrow \\ \alpha^2+(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \\ a^2=0 \text{ και } (a-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \\ a=0 \text{ και } \alpha=\beta.\end{gathered}$$

Οπότε $K=\Lambda$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta=0$.