

12673

ΘΕΜΑ 2

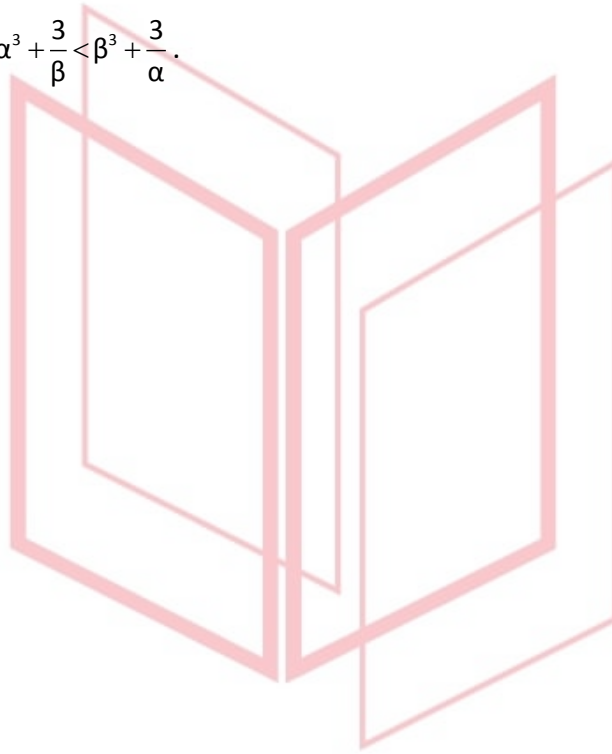
Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

12673-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Με $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$, οπότε, $\frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta}$. Επομένως, $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Με $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $\alpha^3 < \beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$, οπότε με πρόσθεση

των δυο ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$$

που είναι το ζητούμενο.



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

12922

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

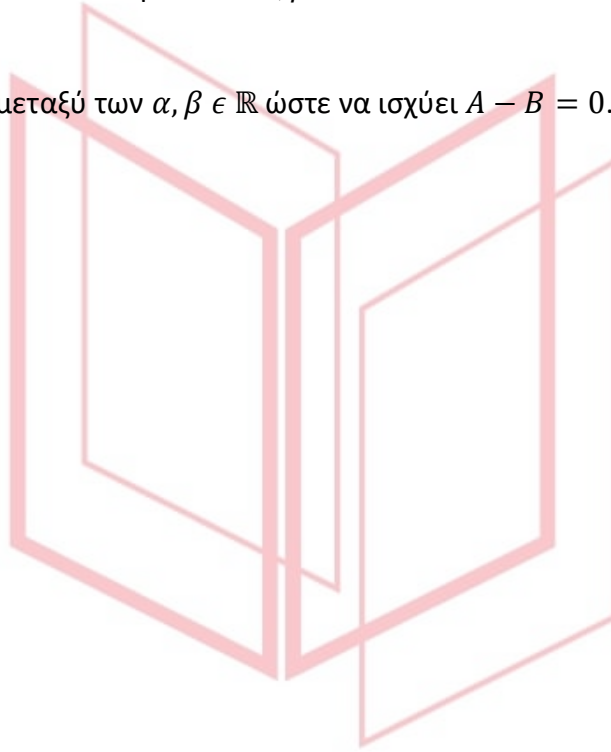
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

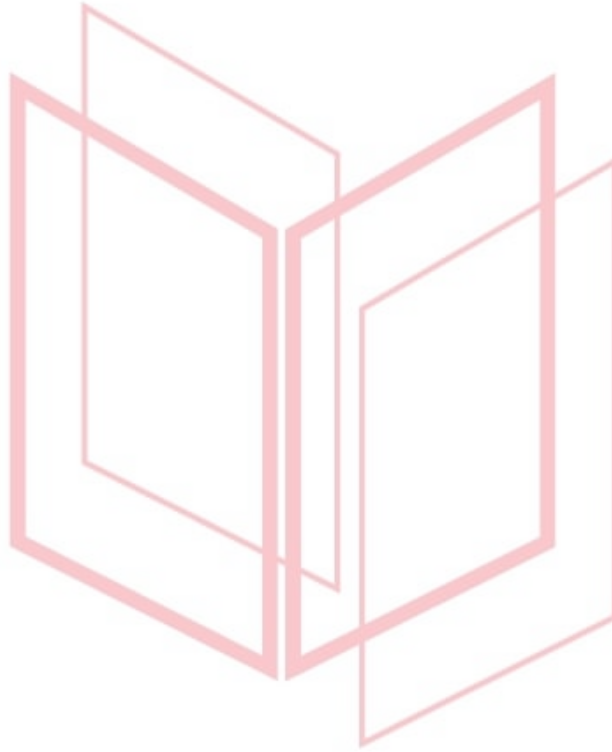
12922-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να είναι η παράσταση $A = 0$, πρέπει $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ που ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

β) Είναι: $A - B = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, ισχύει σαν τετράγωνο αριθμού.

γ) $A - B = 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

13266

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

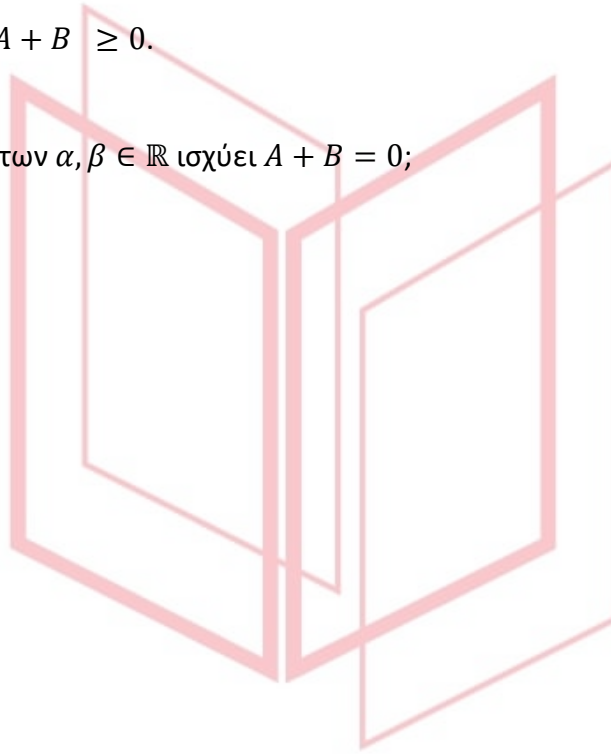
β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

13266-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της ισότητας έχουμε:

$$(\alpha + 2)^2 + 1 = \alpha^2 + 4\alpha + 2^2 + 1 = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = A$$

β)

i. Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$A + B \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + 2)^2 + 1 + (2\beta + 1)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει ως άθροισμα τετραγώνων.

ii. Από το ερώτημα β) i) βλέπουμε ότι η ισότητα ισχύει για

$$(\alpha + 2)^2 + (2\beta + 1)^2 = 0$$

η οποία ισχύει για:

$$\{(\alpha + 2)^2 = 0 \text{ και } (2\beta + 1)^2 = 0\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \alpha = -2 \text{ και } \beta = -\frac{1}{2} \right\}.$$

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

13323

ΘΕΜΑ 2

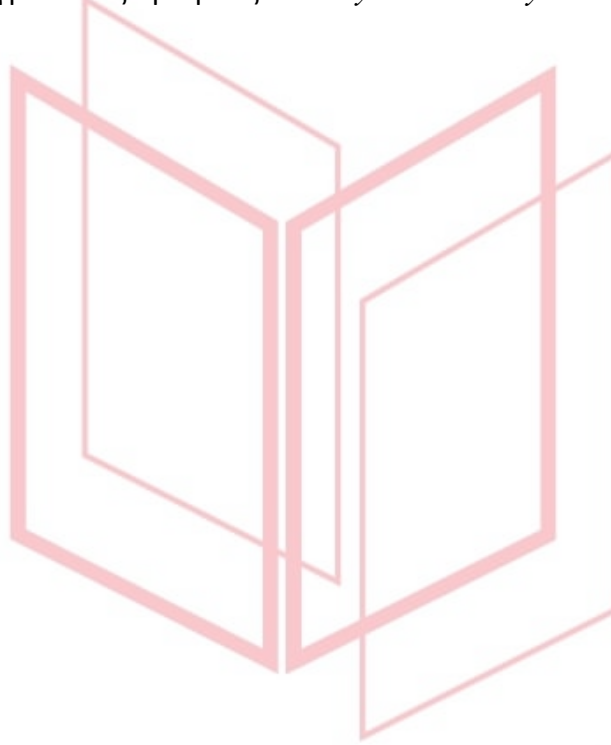
α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$.

(Μονάδες 13)



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

13323-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να αποδείξουμε την ζητούμενη ισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε ευθεία απόδειξη.

Έχουμε λοιπόν:

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 8y + 16) = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17.$$

β) Έχουμε διαδοχικά:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 = 0 \text{ και } (y+4)^2 = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$x-1 = 0 \text{ και } y+4 = 0, \text{ οπότε τελικά}$$

$$x = 1 \text{ και } y = -4.$$

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14475

ΘΕΜΑ 2

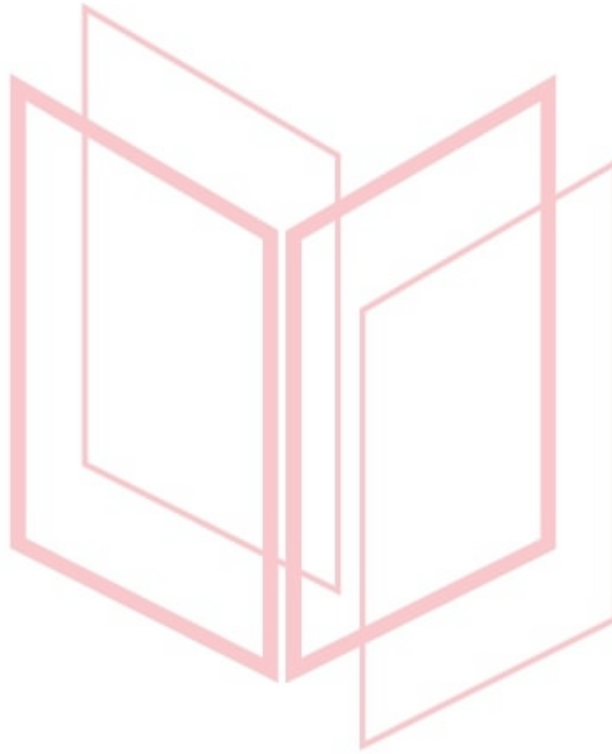
Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)



αθλημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14475-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$$-4 \leq \beta \leq -3, \text{ οπότε}$$

$$-4 \cdot 2 \leq \beta \cdot 2 \leq -3 \cdot 2, \text{ και τελικά}$$

$$-8 \leq 2\beta \leq -6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), και έχουμε:

$$2 - 8 \leq \alpha + 2\beta \leq 4 - 6, \text{ οπότε τελικά}$$

$$-6 \leq \alpha + 2\beta \leq -2.$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε ανισότητες κατά μέλη, η παράσταση $\alpha - \beta$ γράφεται $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Είναι $2 \leq \alpha \leq 4$ (1)

και

$-4 \leq \beta \leq -3$, οπότε πολλαπλασιάζουμε με (-1) τα μέλη της ανισότητας και αυτή αλλάζει φορά

$$-4 \cdot (-1) \geq \beta \cdot (-1) \geq -3 \cdot (-1),$$

$$4 \geq -\beta \geq 3 \text{ και τελικά}$$

$$3 \leq -\beta \leq 4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3), και έχουμε:

$$2 + 3 \leq \alpha - \beta \leq 4 + 4, \text{ οπότε τελικά}$$

$$5 \leq \alpha - \beta \leq 8.$$

14492

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14492-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$. Τότε:

$$4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \leq 2x \leq 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20.$$

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$$P = 2(x - 1) + 2 \cdot 3y = 2x + 6y - 2. \text{ Τότε:}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 6 \cdot 2 \leq 6y \leq 6 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \leq 6y - 2 \leq 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \leq 6y - 2 \leq 16 \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$$8 + 10 \leq 2x + 6y - 2 \leq 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \leq P \leq 30.$$

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ 3

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14602-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$0 < \alpha < 1 \stackrel{\alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha^3 < \alpha^2 \quad (1)$$

και

$$0 < \alpha < 1 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha^2 < \alpha \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha$.

β) Από το δεδομένο και το α) ερώτημα έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1$. Επιπλέον επειδή ο α είναι θετικός αριθμός, ομόσημος του 1 δηλαδή, έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1.$$

Τελικά $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}$.

αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14704

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

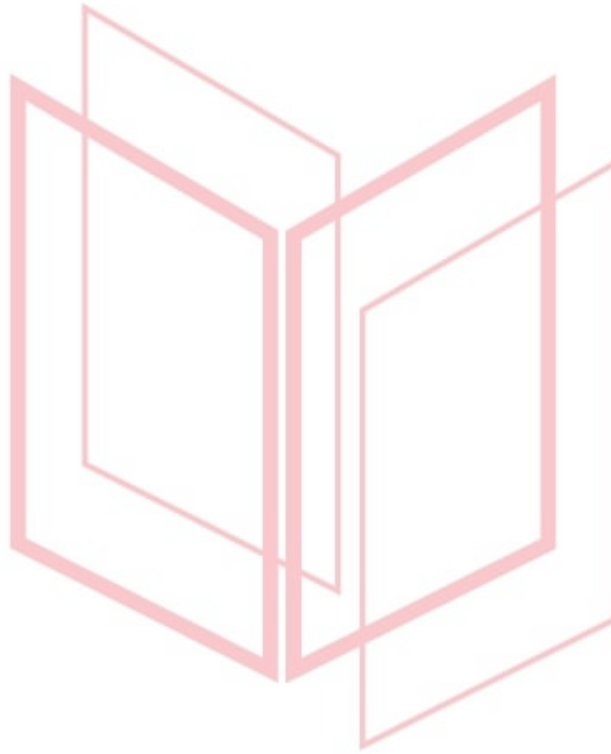
(Μονάδες 5)

β) $2x - 3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)



αθηνάμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14704-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις $2 \leq x \leq 3$ και βρίσκουμε:

$$2 + 1 \leq x + y \leq 3 + 2 \Leftrightarrow 3 \leq x + y \leq 5.$$

β) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $2 \leq x \leq 3$ με 2 και βρίσκουμε: $4 \leq 2x \leq 6$. (1)

Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \leq y \leq 2$ με -3 και βρίσκουμε:

$$-3 \geq -3y \geq -6 \Leftrightarrow -6 \leq -3y \leq -3 \quad (2).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$-2 \leq 2x - 3y \leq 3.$$

γ) Ισχύει ότι: $2 \leq x \leq 3$ (3) και $1 \leq y \leq 2 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq 1$. (4)

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (3) και (4) και βρίσκουμε:

$$\frac{2}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 3.$$

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14713

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

(Μονάδες 7)

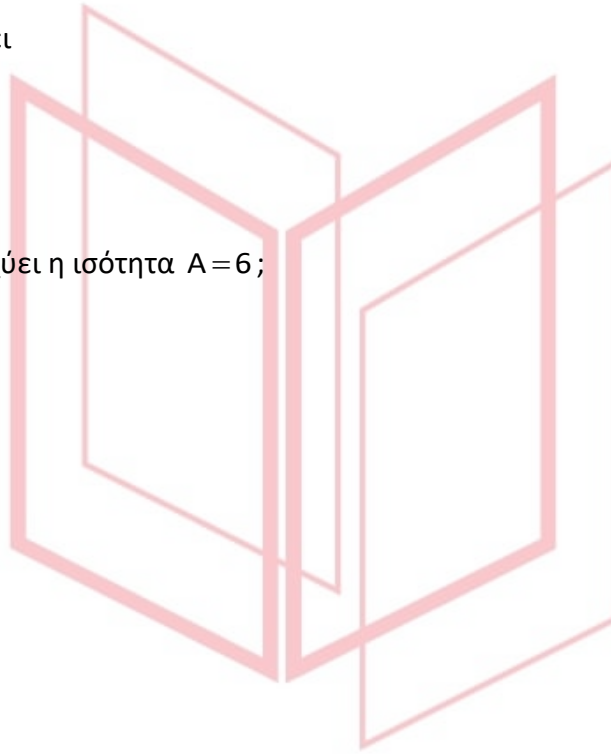
β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

i. $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

(Μονάδες 10)



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

14713-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = \alpha^2(\alpha + 2) + 9(\alpha + 2) = (\alpha + 2)(\alpha^2 + 9)$$

που είναι το ζητούμενο.

β) i. Ισχύει: $\alpha^2 + 2\alpha = \alpha(\alpha + 2)$, οπότε με $\alpha > 0$ έχουμε:

$$A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 2)} = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$$

ii. Επειδή $\alpha > 0$ για την απόδειξη της $A \geq 6$, δηλαδή της $\frac{\alpha^2 + 9}{\alpha} \geq 6$, αρκεί να αποδείξουμε

ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$, ή αρκεί $\alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0$, που ισχύει αφού προκύπτει από την προφανή ανισότητα $(\alpha - 3)^2 \geq 0$.

Η ισότητα $A = 6$ ισχύει μόνο όταν $(\alpha - 3)^2 = 0$, δηλαδή μόνο όταν $\alpha = 3$.

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

35040

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $L = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - L = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

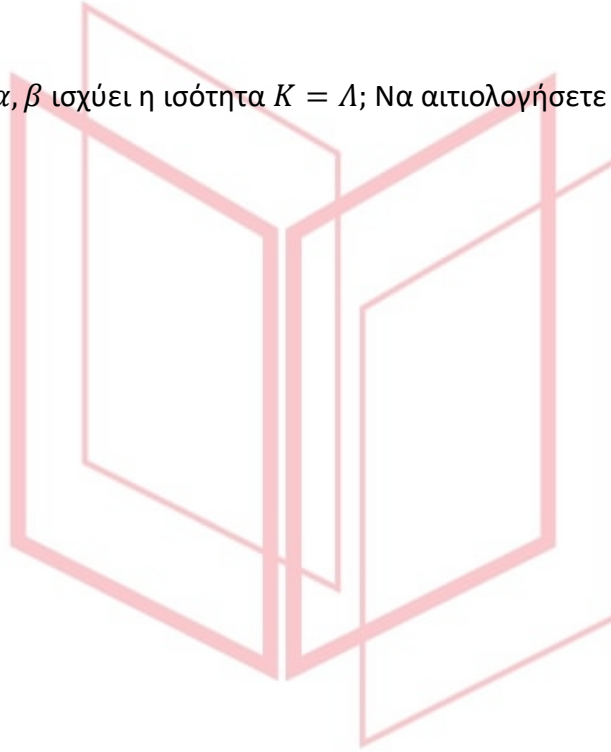
(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq L$, για κάθε τιμή των α, β .

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = L$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)



αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

35040-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\begin{aligned}K - \Lambda &= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 2\alpha(3 - \beta) = \\&= 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - (6\alpha - 2\alpha\beta) = \\&= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta = \\&= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)\end{aligned}$$

β) Ισοδύναμα και διαδοχικά ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}K \geq \Lambda &\Leftrightarrow K - \Lambda \geq 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \geq 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 \geq 0\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για κάθε τιμή των α, β .

γ) Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}K = \Lambda &\Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow ((\alpha + \beta)^2 = 0 \text{ και } (\alpha - 3)^2 = 0) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0 \text{ και } \alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\alpha = -\beta \text{ και } \alpha = 3) \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow (\alpha = 3 \text{ και } \beta = -3)\end{aligned}$$

αλημπίνας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

36899

ΘΕΜΑ 2

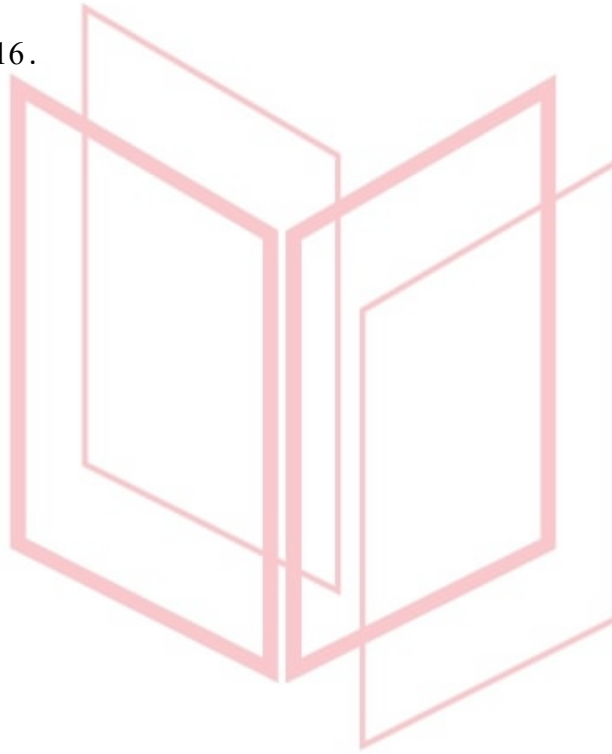
Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$.

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

(Μονάδες 13)



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

36899-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha^2 + \alpha \cdot \frac{4}{\alpha} \geq 4\alpha, \text{ οπότε}$$

$$\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha, \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \text{ και τελικά}$$

$$(\alpha - 2)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ και ομοίως $\beta + \frac{4}{\beta} \geq 4$. Πολλαπλασιάζοντας

κατά μέλη τις δυο ανισότητες προκύπτει: $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37179

ΘΕΜΑ 2

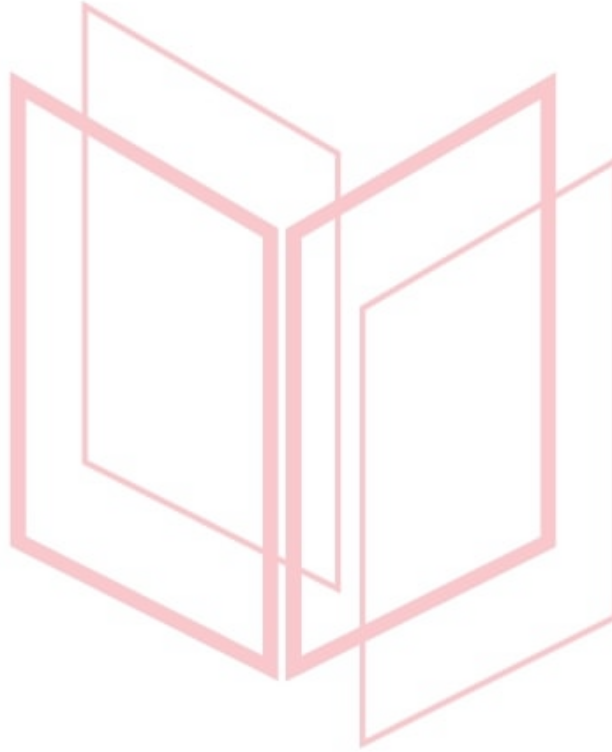
Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2a^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$;

(Μονάδες 13)



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

37179-Λύση

Λύση

α) Ισχύουν:

$$\begin{aligned}K \geq \Lambda &\Leftrightarrow \\K - \Lambda \geq 0 &\Leftrightarrow \\2a^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 &\Leftrightarrow \\a^2 + a^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 &\Leftrightarrow \\a^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0, &\end{aligned}$$

η οποία ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Άρα $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

β) Εκτελώντας τις πράξεις όπως στο α ερώτημα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}K = \Lambda &\Leftrightarrow \\a^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\a^2 = 0 \text{ και } (\alpha - \beta)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\a = 0 \text{ και } \alpha = \beta. &\end{aligned}$$

Οπότε $K = \Lambda$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta = 0$.

αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ