ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

12685-Λύση

Λύση

α) Κάνοντας πράξεις στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}+\alpha \cdot \frac{1}{\beta}+\beta \cdot \frac{1}{\alpha}+\beta \cdot \frac{1}{\beta}=4, \text{τότε}$$

$$1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1=4, \text{τότε}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=0 \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta.$$

13053

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

(Μονάδες 13)

13053-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=0$, προκύπτει ότι $\beta+\gamma=-\alpha$, που είναι το ζητούμενο.

ii. Με τη βοήθεια του προηγούμενου υποερωτήματος, έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha^2}{-\alpha}=-\alpha .$$

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha .$$

Ομοίως, από τη δοσμένη ισότητα παίρνουμε $\gamma+\alpha=-\beta$ και $\alpha+\beta=-\gamma$, οπότε

$$\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta^2}{-\beta}=-\beta \text{ και } \frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma^2}{-\gamma}=-\gamma .$$

Επομένως,

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=-\alpha-\beta-\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

που είναι το ζητούμενο.

13088

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

13088-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\mathrm{A} = 2(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2) - (\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2) - 6\mathrm{xy} - \mathrm{y}^2 = x^2$

β) Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε στην α) όπου x = 2021 και y=1 προκύπτει ότι το αριστερό μέλος είναι της μορφής: $2(\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2) - (\mathrm{x}^2 - 2\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2) - 6\mathrm{xy} - \mathrm{y}^2$ άρα θα είναι ίσο με το Α, επομένως και ίσο με το $x^2 = 2021^2$ επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

13472

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

13472-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Αν αντικαταστήσουμε τα α^2, β^2 από τις δοσμένες ισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^2-\beta^2=2\alpha+\beta-2\beta-\alpha=\alpha-\beta.$$

ii. Η τελευταία ισότητα γράφεται $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha-\beta$. Αλλά, $\alpha-\beta\neq 0$, αφού οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε $\alpha+\beta=1$, που είναι το ζητούμενο.

β) Όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$A=\alpha^2+\beta^2=2\alpha+\beta+2\beta+\alpha=3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=3\cdot 1=3$$

αφού $\alpha+\beta=1$.

14329

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A=\frac{-\alpha}{\beta}, B=\alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)

14329-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ο αριθμός $A = \frac{-\alpha}{\beta}$ ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι διαφορετικός του 0. Δηλαδή, αρκεί να ισχύει $\beta \neq 0$.

Ο αριθμός $B = \alpha^2$ ορίζεται για οποιαδήποτε τιμή του $\alpha \in R$.

Για να μην είναι μηδέν οι Α,Β, αρκεί και $\alpha \neq 0$.

β) Δύο αριθμοί Α,Β λέγονται αντίθετοι, αν και μόνο, αν ισχύει $A + B = 0$.

Ισχύουν ισοδύναμα:

$$A + B = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-a}{\beta} + a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2\beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(\alpha\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a = 0 \text{ ή } \alpha\beta - 1 = 0$$

Όμως από τον ορισμό των δύο αριθμών είναι $\alpha \neq 0$, οπότε ισχύει ισοδύναμα ότι $\alpha\beta = 1$, το οποίο σημαίνει ότι οι αριθμοί α,β είναι αντίστροφοι.

14458

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy\ .$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

14458-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Από τη δοσμένη ισότητα με πράξεις έχουμε:

$x^2+4xy+xy+4y^2-9xy=0$, οπότε $x^2+4y^2-4xy=0$, δηλαδή $(2y-x)^2=0$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Είναι: $(2y-x)^2=0$, οπότε $2y-x=0$, άρα $y=\frac{x}{2}$ που είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\frac{x}{2}=y$, (1).

Με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=\left(2y-y\right)^2+\left(2y+y\right)^2=y^2+(3y)^2=y^2+9y^2=10y^2$$

14473

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

14473-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2\text{, δηλαδή}$$

$$4x+5y=-2(x-4y)\text{, οπότε}$$

$$4x+5y=-2x+8y\text{, δηλαδή}$$

$$3y=6x\ \text{ και τελικά}$$

$$y=2x$$

β) Για $y=2x$ η παράσταση A γράφεται:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x(2x)}{x(2x)}=\frac{2x^2+3(4x^2)+2x^2}{2x^2}=$$
$$=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8.$$

14489

ΘΕΜΑ 2

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

(Μονάδες 10)

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

(Μονάδες 15)

14489-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι αριθμοί $2\alpha-1$ και $\beta-1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ έχουμε:

$(2\alpha-1)(\beta-1)=1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta-\beta-2\alpha+1=1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=2\alpha+\beta$.

β) Για να είναι οι αριθμοί x και y αντίθετοι αρκεί να δείξουμε ότι:

$x+y=0$.

Συνεπώς,

$x+y=(\alpha-\beta)+\alpha(1-2\beta)+2\beta=\alpha-\beta+\alpha-2\alpha\beta+2\beta=2\alpha+\beta-2\alpha\beta=0$ ισχύει.

14555

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

14555-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ανοίγοντας τις παρενθέσεις στη δοθείσα ισότητα, έχουμε:

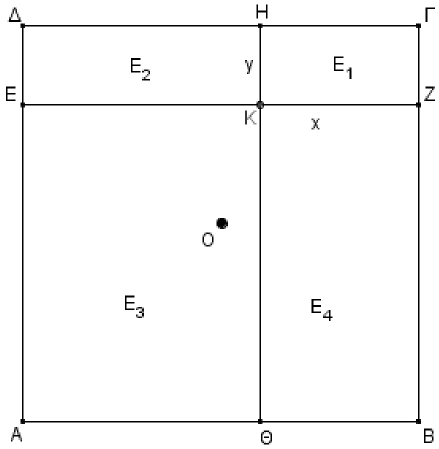
$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 5y^2 = 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5.$

β) Παρατηρούμε ότι $P = [(x + y)(x - y)]^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125.$

15052

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:



α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y.

(Μονάδες 8)

β)Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

(Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

(Μονάδες 5)

15052-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Με $x, y \in (0, 6)$ είναι:

$E_1 = xy,\ E_2 = (6-x)y = 6y - yx,\ E_3 = (6-x)(6-y) = 36 - 6x - 6y + xy,\ E_4 = x(6-y) = 6x - xy$

β) Με $x = 4,\ y = 2$ έχουμε:

$$E_1 = x \cdot y = 2 \cdot 4 = 8$$

$$E_2 = (6-x)y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$E_3 = (6-x)(6-y) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$E_4 = x(6-y) = 4 \cdot 4 = 16$$

γ) i. Από την ισότητα $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$ παίρνουμε

$$xy + 36 - 6x - 6x + xy = 6y - xy + 6x - xy$$

οπότε $4xy + 36 = 12x + 12y$, που γράφεται $xy + 9 = 3(x+y)$ και είναι η ζητούμενη ισότητα.

ii. Από την ισότητα του ερωτήματος (γ)i. έχουμε:

$xy - 3x + 9 - 3y = 0$, οπότε $x(y-3) - 3(y-3) = 0$, δηλαδή $(y-3)(x-3) = 0$, άρα $y = 3$ ή $x = 3$.

- Αν $y = 3$, τότε $(KH) = 3$, οπότε το τμήμα ΕΖ διέρχεται από το Ο.
- Αν $x = 3$, τότε $(KZ) = 3$, οπότε το τμήμα ΘΗ διέρχεται από το Ο.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

35388-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=3\beta$ και

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow \delta=5\gamma$

β) Για $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{(3\beta)\gamma+\beta\gamma}{\beta(5\gamma)-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{5\beta\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$$

36884

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

(Μονάδες 13)

36884-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$(x-1)^2+(y+3)^2=(x^2-2x+1)+(y^2+6y+9)=x^2+y^2-2x+6y+10$.

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$x^2+y^2-2x+6y+10=0\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$

$(x-1)^2+(y+3)^2=0$, οπότε

$x-1=0$ και $y+3=0$, δηλαδή

$x=1$ και $y=-3$.