14970

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $y=\lambda(x-2)+\lambda-2,\ \lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τις ευθείες που προκύπτουν όταν $\lambda=1$ και όταν $\lambda=2$. Κατόπιν να βρείτε το κοινό σημείο Μ των δυο ευθειών.

(Μονάδες 7)

Έστω $M(1,-2)$

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ, διέρχονται από το Μ.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε:

i. τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

ii. για ποιες τιμές του λ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

14970-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Με $\lambda=1$ έχουμε

$$y=x-2+1-2 \Rightarrow y=x-3$$

ενώ με $\lambda=2$ έχουμε $y=2x-4$.

Οι συντεταγμένες του Μ προκύπτουν από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-3 \\ x-3=2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

Επομένως το κοινό σημείο των δυο ευθειών είναι το $M(1,-2)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συντεταγμένες του Μ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Με $x=1$ η εξίσωση γράφεται

$$y=\lambda(1-2)+\lambda-2 \Leftrightarrow y=-\lambda+\lambda-2 \Leftrightarrow y=-2$$

οπότε πραγματικά κάθε ευθεία που προκύπτει από την δοσμένη εξίσωση διέρχεται από το Μ.

γ) i. Με $y=0$ στην δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$\lambda(x-2)+\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda x-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda x=\lambda+2 \Leftrightarrow x=\frac{\lambda+2}{\lambda}$$

Προφανώς $\lambda \neq 0$, αφού με $\lambda=0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Με $x=0$ στη δοσμένη εξίσωση παίρνουμε:

$$y=-2\lambda+\lambda-2 \Leftrightarrow y=-\lambda-2$$

Επομένως η ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,-\lambda-2)$ και τον $x'x$ στο σημείο $B\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}, 0\right)$.

ii. Ισχύει: $(OA)=|-\lambda-2|=|\lambda+2|$, $(OB)=\left|\frac{\lambda+2}{\lambda}\right|=\frac{|\lambda+2|}{|\lambda|}$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}$. Έτσι, έχουμε:

$$(OAB)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{|\lambda+2|^2}{|\lambda|}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (\lambda+2)^2=|\lambda|$$

- Αν $\lambda>0$, τότε έχουμε:

  $\lambda^2+4\lambda+4=\lambda \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda+4=0$, που δεν έχει πραγματικές ρίζες.

- Αν $\lambda<0$, τότε έχουμε:

14970-Λύση

$$\lambda^2+4\lambda+4=-\lambda \Leftrightarrow \lambda^2+5\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=-4$$

15027

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(1,-1) και Β(3,5) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

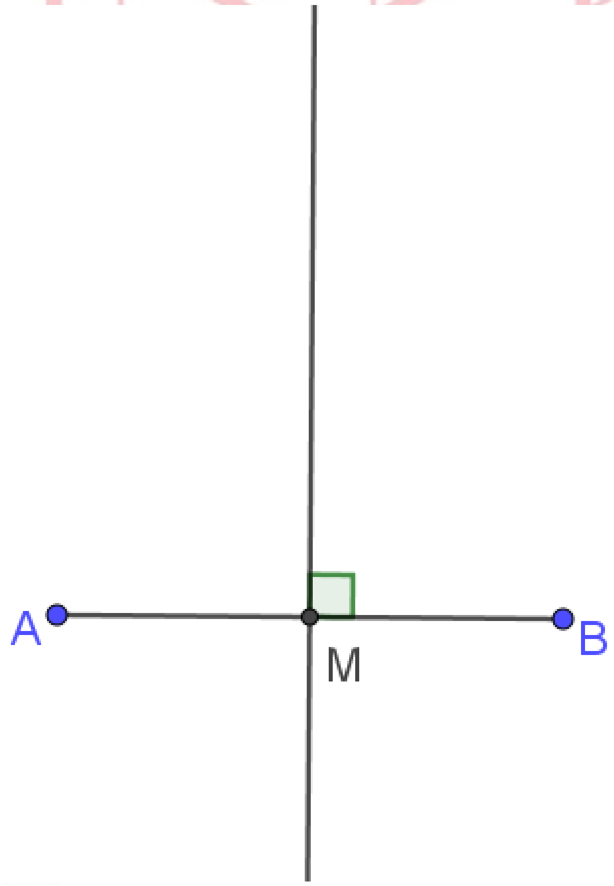
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 10)



15027-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda = \frac{5-(-1)}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$.

β) Το μέσο Μ του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\mathrm{M}(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2})$ δηλαδή Μ(2,2).

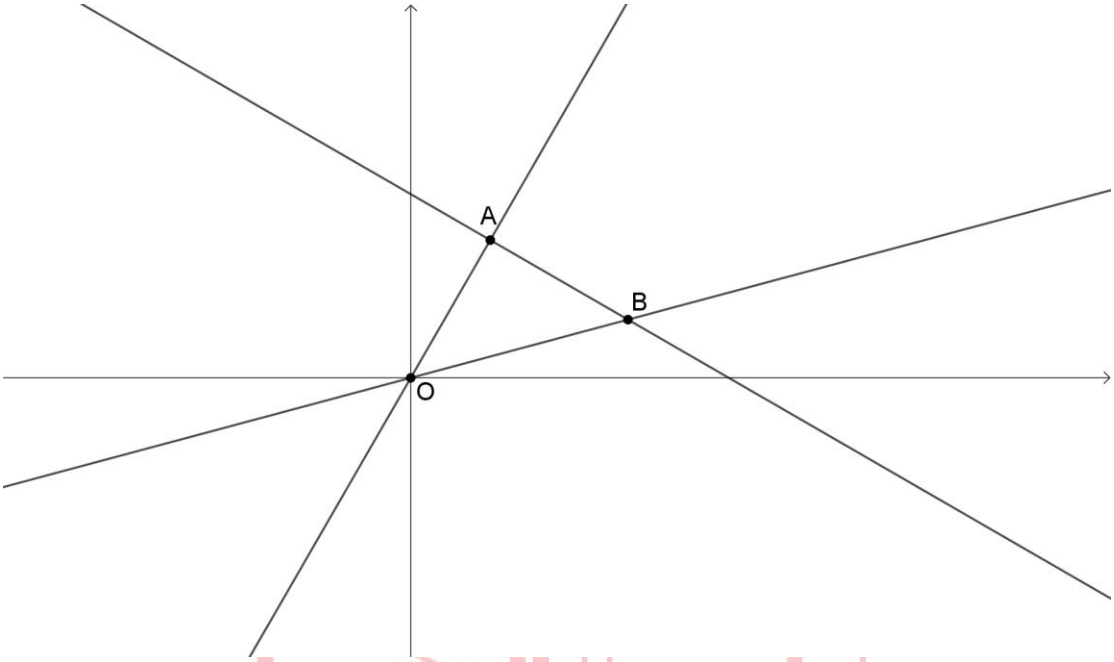
γ) Αν (ε) η ζητούμενη μεσοκάθετος τότε $(\varepsilon) \perp \mathrm{AB}$ οπότε $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\mathrm{AB}} = -1$ και άρα $\lambda_\varepsilon \cdot 3 = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{1}{3}$.

Η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο Μ(2,2) και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{3}$, οπότε $(\varepsilon): y-2 = -\frac{1}{3}(x-2)$.

15029

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(1,\sqrt{3})$, $B(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$.



α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA καθώς και τη γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB καθώς και τη γωνία ϕ που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$.

(Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι $\varepsilon\phi 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

(Μονάδες 6)

15029-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η κλίση της ευθείας ΟΑ είναι $\lambda_{OA}=\frac{\sqrt{3}-0}{1-0}=\sqrt{3}$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση $y=\sqrt{3}\cdot x$. Η γωνία ω που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $\sqrt{3}$, οπότε είναι $\omega=60^\circ$.

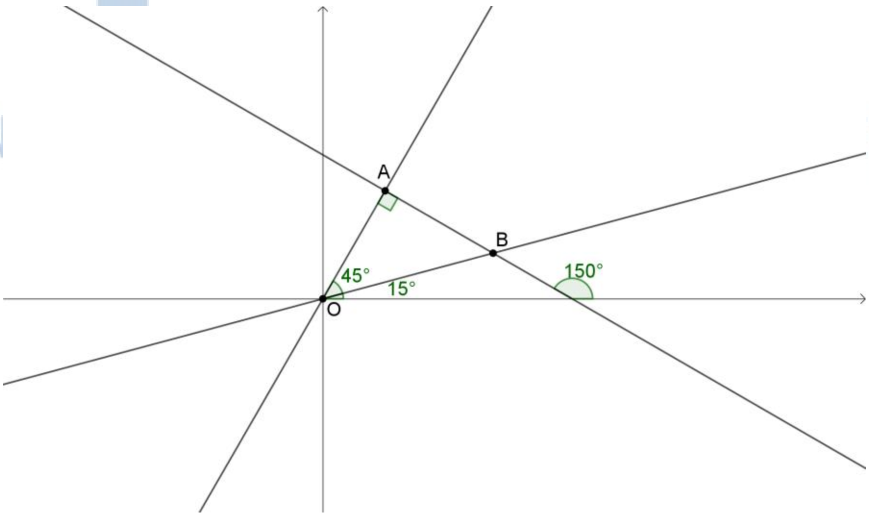
β) Η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι $\lambda_{AB}=\frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1-1}=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(1,\sqrt{3})$ έχει εξίσωση $y-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)\Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Η γωνία ϕ που σχηματίζει με τον $x'x$ έχει εφαπτομένη $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε είναι $\phi=150^\circ$.

γ) Είναι $\lambda_{OA}\cdot\lambda_{AB}=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-1$, δηλαδή $OA\perp AB$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$.

Επίσης $(OA)=\sqrt{(1-0)^2+\left(\sqrt{3}-0\right)^2}=2$, $(AB)=\sqrt{(\sqrt{3}+1-1)^2+(\sqrt{3}-1-\sqrt{3})^2}=2$ και αφού $(OA)=(AB)$ το ΟΑΒ είναι και ισοσκελές.

δ) Αν θ η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΟΒ με τον $x'x$, είναι $\theta=\omega-A\hat{O}B=60^\circ-45^\circ=15^\circ$, αφού $A\hat{O}B=45^\circ$ δεδομένου ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A}=90^\circ$. Όμως $\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi 15^\circ$ είναι η κλίση της ευθείας ΟΒ δηλαδή $\frac{\sqrt{3}-1-0}{\sqrt{3}+1-0}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$. Συνεπώς $\varepsilon\varphi 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.



15044

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $B(6,-1)$.

α)

i. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, είναι το σημείο $M(3,2)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(Μονάδες 15)

15044-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\lambda_{AB} = \lambda_1 = \frac{-1-5}{6-0} = -1$.

ii. Αν $M(x_M, y_M)$, ισχύει: $\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \end{cases}$

β) Η μεσοκάθετη ευθεία (ε) του ευθύγραμμου τμήματος AB διέρχεται από το σημείο $M(3,2)$ και έχει κλίση λ, η οποία προκύπτει από την εξίσωση:

$$\lambda \cdot \lambda_1 = -1 \Leftrightarrow \lambda \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Επομένως η εξίσωσή της είναι η $y - 2 = 1 \cdot (x - 3) \Leftrightarrow \ (\varepsilon): y = x - 1$.

15271

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(-3,\ 2)$, $B(1,\ 6)$ και $\Gamma(-13,\ -7)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα Α, Β.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα Α, Β έχει εξίσωση $y = x + 5$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

(Μονάδες 10)

15271-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α, Β έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{6-2}{1+3} = 1$.

β) Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$ και διέρχεται από το σημείο Α, οπότε έχει εξίσωση $y-2=1(x+3)$ δηλαδή είναι η $y = x+5$.

γ) Το σημείο Γ είναι πάνω στην ευθεία ΑΒ μόνο όταν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. Με $x=-13$ στον τύπο της ευθείας ΑΒ έχουμε:

$$y = -13+5 = -8 \neq y_{\Gamma} = -7$$

Άρα το σημείο Γ δεν είναι πάνω στην ΑΒ.

15275

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το σημείο $M(2, 1)$.

α) Μια ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ διέρχεται από το Μ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της.

(Μονάδες 2)

ii. Για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Α, Β αντίστοιχα.

i. Να βρείτε, με τη βοήθεια του λ, τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

iii. Να υπολογίσετε, σε κάθε περίπτωση, το εμβαδόν του ισοσκελούς τριγώνου που σχηματίζεται.

(Μονάδες 6)

15275-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i. Αφού η ευθεία διέρχεται από το Μ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, η εξίσωση της είναι $y-1=\lambda(x-2)$ που γράφεται $y=\lambda x-2\lambda+1$.

ii. Σε κάθε περίπτωση που ισχύει $\lambda \neq 0$ η ευθεία τέμνει και τους δυο άξονες και όταν δεν διέρχεται από την αρχή Ο, δηλαδή όταν $\lambda \neq \frac{1}{2}$, σχηματίζει τρίγωνο .

Επομένως, η ευθεία σχηματίζει τρίγωνο με τους άξονες μόνο όταν $\lambda \in \mathbb{R}-\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

β) i. Με $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας, παίρνουμε $x=\frac{2\lambda-1}{\lambda}$, οπότε $A\left(\frac{2\lambda-1}{\lambda}, 0\right)$, ενώ με $x=0$ παίρνουμε $y=-2\lambda+1$, οπότε $B(0,-2\lambda+1)$. Επομένως τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ είναι:

$$(OA)=\frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|} \text{ και } (OB)=|-2\lambda+1|=|2\lambda-1|$$

ii. Η ευθεία σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, μόνο όταν $(OA)=(OB)$. Είναι:

$$(OA)=(OB) \Leftrightarrow \frac{|2\lambda-1|}{|\lambda|}=|2\lambda-1| \Leftrightarrow |2\lambda-1|(|\lambda|-1)=0 \Leftrightarrow |\lambda|-1=0$$

αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο, όταν $\lambda=-1$ ή $\lambda=1$.

iii. Αν $\lambda=-1$, τότε $(OA)=3$ και $(OB)=3$, οπότε το εμβαδόν (OAB) του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{9}{2}$

Αν $\lambda=1$, τότε $(OA)=1$ και $(OB)=1$, οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $(OAB)=\frac{1}{2}$

Σχόλιο

Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (υποτείνουσα) με τον άξονα x΄x είναι 45° ή 135°. Έτσι, έχουμε $\lambda=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$ ή $\lambda=\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$ που είναι οι τιμές που βρήκαμε παραπάνω.

15657

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x+y=6$ και $\varepsilon_2: x-2y=-2$.

α) Να βρείτε το κοινό τους σημείο M.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3: 3x-y=4$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(Μονάδες 13)

15657-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε το κοινό σημείο των ευθειών ε_1 και ε_2 θα λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=6 \\ -2x+4y=4 \end{cases} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5y=10 \\ x-2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=2. \end{cases}$$

Οπότε το σημείο M έχει συντεταγμένες $\mathrm{M}(2,2)$.

β) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 : 3x-y=4$ θα διέρχονται από το ίδιο σημείο, εάν η ευθεία $3x-y=4$ διέρχεται από το $\mathrm{M}(2,2)$, δηλαδή εάν: $3\cdot 2-2=4$, που ισχύει.

15658

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$ τα οποία έχουν κοινή αρχή το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}$, B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας AB,

i. να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $\mathrm{A}(4,-1)$ και $\mathrm{B}(3,2)$.

(Μονάδες 5)

ii. να δείξετε ότι $3x_\Gamma + y_\Gamma = 11$.

(Μονάδες 6)

iii. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, αν ισχύει ότι το Γ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB και $\left|\overrightarrow{\mathrm{K\Gamma}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$.

(Μονάδες 10)

15658-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1+(-2)\cdot 1=0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

β)

i. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο A είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\alpha}=(2,-2)$, οπότε: $x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{K}}=2 \Leftrightarrow x_{\mathrm{A}}-2=2 \Leftrightarrow x_{\mathrm{A}}=4$.

$y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{K}}=-2 \Leftrightarrow y_{\mathrm{A}}-1=-2 \Leftrightarrow y_{\mathrm{A}}=-1$.

Άρα $\mathrm{A}(4,-1)$. Το σημείο $\mathrm{K}(2,1)$ είναι η αρχή και το σημείο B είναι το πέρας του διανύσματος $\vec{\beta}=(1,1)$, οπότε: $x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{K}}=1 \Leftrightarrow x_{\mathrm{B}}-2=1 \Leftrightarrow x_{\mathrm{B}}=3$.

$y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{K}}=1 \Leftrightarrow y_{\mathrm{B}}-1=1 \Leftrightarrow y_{\mathrm{B}}=2$.

Άρα $\mathrm{B}(3,2)$.

ii. Η ευθεία AB έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned}&y-2=\frac{2-(-1)}{3-4}\cdot(x-3)\Leftrightarrow\\&y-2=-3\cdot(x-3)\Leftrightarrow\\&3x+y=11.\end{aligned}$$

Το σημείο $\Gamma(x_\Gamma,y_\Gamma)$ είναι ένα σημείο της ευθείας AB, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή: $3x_\Gamma+y_\Gamma=11$.

iii. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}&\left|\overrightarrow{\mathrm{K}\Gamma}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\Leftrightarrow\\&\sqrt{(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(3-4)^2+(2+1)^2}\Leftrightarrow\\&(x_\Gamma-2)^2+(y_\Gamma-1)^2=\frac{10}{4}\overset{\beta ii)}{\Leftrightarrow}\\&(x_\Gamma-2)^2+(10-3x_\Gamma)^2=\frac{10}{4}\Leftrightarrow\\&5{x_\Gamma}^2-32x_\Gamma+\frac{203}{4}=0.\end{aligned}$$

15658-Λύση

Η τελευταία εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού με $\Delta = 9 > 0$ και ρίζες $x_1 = 3,5$ και $x_2 = 2,9$. Επειδή το Γ είναι εσωτερικό του τμήματος AB, η τετμημένη του θα πρέπει να είναι μεταξύ 3 και 4. Άρα $x_\Gamma = 3,5$ και $3 \cdot 3,5 + y_\Gamma = 11 \Leftrightarrow y_\Gamma = 0,5$.

16002

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $Α(3,-2)$ και $Γ(5,2)$. Αν το σημείο $Μ\left(3,\frac{1}{2}\right)$ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $Β(1,-1)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΓ.

(Μονάδες 10)

16002-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν $B(x, y)$, τότε έχουμε:

$$\frac{x+5}{2}=3 \text{ και } \frac{y+2}{2}=\frac{1}{2}$$

οπότε $x=1$ και $y=-1$, άρα $B(1,-1)$.

β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι $(B\Gamma)=\sqrt{(5-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$.

γ) Η ευθεία ΑΓ διέρχεται από το σημείο $A(3,-2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda=\frac{2+2}{5-3}=\frac{4}{2}=2$$

οπότε η εξίσωσή της είναι η $y+2=2(x-3)$, που γράφεται $y=2x-8$.

16766

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $(ε_1)$ και $(ε_2)$ με εξισώσεις $x - 3y = 4$ και $9x + 3y = 6$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(ε_1)$ και $(ε_2)$ είναι κάθετες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(ε_1)$ και $(ε_2)$ τέμνονται στο σημείο $Α(1, -1)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

16766-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση

$$x - 3y - 4 = 0$$

και συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση

$$9x + 3y - 6 = 0$$

και συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_2 = -\frac{A}{B} = -\frac{9}{3} = -3$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{3}(-3) = -1$$

Άρα, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες.

β) Προσθέτουμε τις δύο εξισώσεις κατά μέλη, οπότε:

$$10x = 10 \text{ ή } x = 1$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $9x + 3y = 6$ και έχουμε διαδοχικά:

$$9 + 3y = 6$$

$$3y = -3$$

$$y = -1$$

Άρα, το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι το $A(1, -1)$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_o, y_o)$ και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ έχει εξίσωση $x = x_o$. Επομένως, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $x = 1$.

17078

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(3, 2\alpha)$, $B(4, \alpha)$, $\Gamma(\alpha+1, 1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha, 1)$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση $y = -\alpha x + 5\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. Τα σημεία Γ και Δ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν $\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

iii. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο όταν $\alpha \neq \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

17078-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(3,2\alpha)$ και $B(4,\alpha)$ είναι

$$\lambda=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\alpha-2\alpha}{4-3}=\frac{-\alpha}{1}=-\alpha\,,$$

οπότε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B έχει εξίσωση

$y-y_A=\lambda(x-x_A)$ ή $y-2\alpha=-\alpha(x-3)$ ή $y-2\alpha=-\alpha x+3\alpha$ ή $y=-\alpha x+5\alpha.$

ii) Τα σημεία $\Gamma(\alpha+1,1-\alpha)$ και $\Delta(\alpha,1)$ ανήκουν στην ευθεία AB αν και μόνο αν οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωσή της, $y=-\alpha x+5\alpha$. Έχουμε διαδοχικά

$1-\alpha=-\alpha(\alpha+1)+5\alpha$ ή $1-\alpha=-\alpha^2-\alpha+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$,

επίσης $1=-\alpha\cdot\alpha+5\alpha$ ή $1=-\alpha^2+5\alpha$ ή $\alpha^2-5\alpha+1=0$ ή $\alpha=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

iii) Είναι $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A\,,y_B-y_A)=(4-3\,,\ \alpha-2\alpha\,)=(1\,,-\alpha\,)$ και

$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(x_\Gamma-x_\Delta\,,y_\Gamma-y_\Delta)=(\alpha+1-\alpha\ ,\ 1-\alpha-1)=(1\,,-\alpha\,)$.

Παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(1\,,-\alpha\,)$. Όμως από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, όταν $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$ τα σημεία Γ και Δ δεν ανήκουν στην ευθεία AB. Τότε, επειδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Delta\Gamma$ θα είναι παράλληλα, επίσης θα έχουν ίσα μήκη, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Έστω ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο για κάποιο $\alpha\neq\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$. Τότε θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Delta}|$. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\overrightarrow{AB}=(1\,,-\alpha\,)$, άρα $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+(-\alpha)^2}=\sqrt{1+\alpha^2}$. Επίσης είναι $\overrightarrow{A\Delta}=(x_\Delta-x_A\,,y_\Delta-y_A)=(\alpha-3,1-2\alpha)$, άρα $|\overrightarrow{A\Delta}|=\sqrt{(\alpha-3)^2+(1-2\alpha)^2}=\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+10}$.

Επομένως θα έχουμε $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Delta}|$ ή $\sqrt{1+\alpha^2}=\sqrt{5\alpha^2-10\alpha+10}$ ή $5\alpha^2-10\alpha+10=1+\alpha^2$ ή $4\alpha^2-10\alpha+9=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-10)^2-4\cdot4\cdot9=-44<0$, άρα δεν έχει πραγματικές ρίζες. Οπότε δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο. Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

18236

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A(-1, 5)$ και $B(2, 1)$. Αν οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ βρίσκονται πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -x + 4$ και $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ αντίστοιχα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\Gamma(4, 0)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε:

i. το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ

(Μονάδες 6)

ii. την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

(Μονάδες 7)

18236-Λύση

ΛΥΣΗ

α)Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και προσδιορίζεται από τη λύση του αντίστοιχου συστήματος. Είναι:

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+4=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x=4-8 \\ y=-x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

οπότε $\Gamma(4,0)$.

β) i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΓ είναι

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{0-5}{4+1}=-1$$

ii. Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ, οπότε $\lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1$ με $\lambda_{A\Gamma}=-1$, οπότε $\lambda_{B\Delta}=1$. Επομένως η εξίσωση του ύψους ΒΔ είναι:

$$y-1=1(x-2)\Leftrightarrow y=x-1$$

18351

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(-1,5), Β(3,3). Να υπολογίσετε:

α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 8)

β) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

(Μονάδες 8)

γ) Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 9)

18351-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ είναι:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = (1,4)$$

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-5}{3-(-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

γ) Για τη μεσοκάθετο (η) του τμήματος ΑΒ ισχύει:

$$\eta \perp AB \Leftrightarrow \lambda_\eta \cdot \lambda_{AB} = -1$$

Επομένως, $\lambda_\eta = 2$.

Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του τμήματος ΑΒ είναι:

$$y - y_M = \lambda_\eta(x - x_M)$$

$$y - 4 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x + 2$$

18568

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α(2,4), Β(-1,0) και Γ(3,-2).

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 04)

β) Αν η ευθεία ΑΒ τέμνει τον άξονα y'y σε ένα σημείο Δ και η ευθεία ΑΓ τέμνει τον άξονα x'x σε ένα σημείο Ε, τότε:

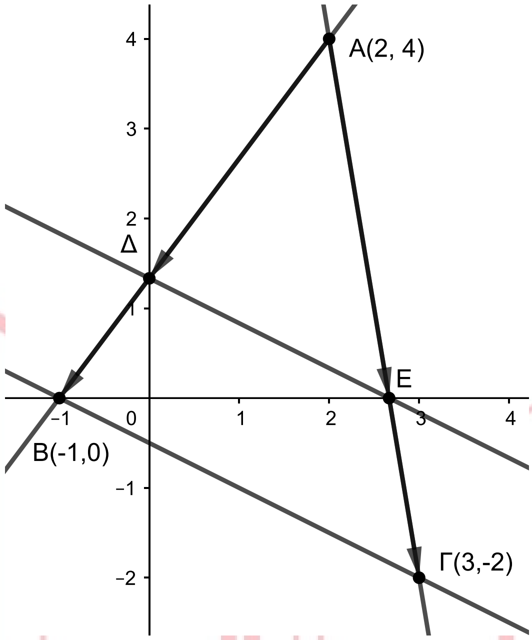
i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε. (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΔ} = 2\overrightarrow{ΔΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ} = 2\overrightarrow{ΕΓ}$. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ. (Μονάδες 05)

18568-Λύση

ΛΥΣΗ



α) Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών ΑΒ και ΑΓ ορίζονται και είναι

$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-4}{-1-2} = \frac{4}{3}$ και $\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{-2-4}{3-2} = \frac{-6}{1} = -6$. Επειδή $\lambda_{AB} \neq \lambda_{A\Gamma}$ οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ δεν είναι παράλληλες, οπότε τα σημεία Α,Β και Γ δεν είναι συνευθειακά και αποτελούν κορυφές τριγώνου.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{4}{3}$ από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο Α(2,4), άρα η εξίσωσή της είναι: (ΑΒ): $y-y_A=\lambda(x-x_A)$ ή $y-4=\frac{4}{3}(x-2)$ ή $4x-3y+4=0$.

Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης -6 από το α) ερώτημα και διέρχεται από το σημείο Γ(3,-2), άρα η εξίσωσή της είναι: (ΑΓ): $y-y_\Gamma=\lambda(x-x_\Gamma)$ ή $y+2=-6(x-3)$ ή $6x+y-16=0$.

i. Στην εξίσωση της ευθείας ΑΒ θέτουμε x=0 για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα y'y και έχουμε: $4\cdot 0-3y+4=0 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}$. Άρα $\Delta\left(0,\frac{4}{3}\right)$. Ομοίως στην εξίσωση της ευθείας ΑΓ θέτουμε y=0 για να βρούμε το σημείο που τέμνει τον άξονα x'x και έχουμε: $6x+0-16=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$. Άρα $E\left(\frac{8}{3},0\right)$.

ii. $\overrightarrow{A\Delta}=(0-2, \frac{4}{3}-4)=(-2,-\frac{8}{3})=2\cdot(-1,-\frac{4}{3})$ και $\overrightarrow{\Delta B}=(-1-0, 0-\frac{4}{3})=(-1,-\frac{4}{3})$, οπότε προφανώς $\overrightarrow{A\Delta}=2\overrightarrow{\Delta B}$. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ έχουμε:

18568-Λύση

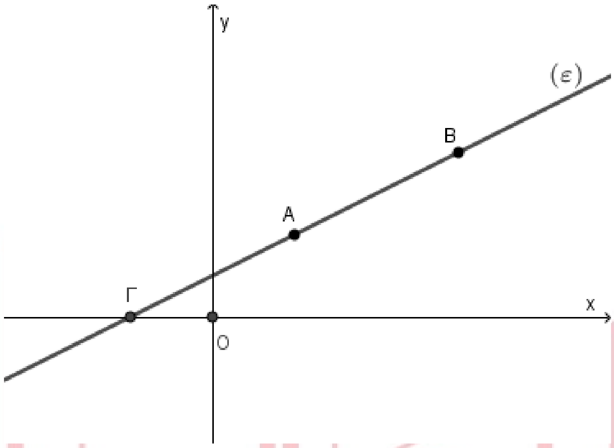
$\overrightarrow{ΔΕ}$ =($\frac{8}{3}$ -2, 0-4)= ($\frac{2}{3}$,-4) = 2 · ($\frac{1}{3}$,-2) και $\overrightarrow{ΕΓ}$= (3-$\frac{8}{3}$, -2-0) = ($\frac{1}{3}$,-2) και ισχύει επίσης ότι $\overrightarrow{ΑΕ}$ = 2$\overrightarrow{ΕΓ}$.

γ) $λ_{ΔΕ}$ = $\frac{\frac{4}{3}-0}{0-\frac{8}{3}}$ = - $\frac{1}{2}$ και $λ_{ΒΓ}$ = $\frac{-2-0}{3+1}$ = - $\frac{2}{4}$ = - $\frac{1}{2}$. Άρα $λ_{ΔΕ}$ = $λ_{ΒΓ}$, επομένως η ευθεία ΔΕ είναι παράλληλη της ευθείας ΒΓ.

20868

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα σημεία $A(1,1), B(3,2)$ και Γ μιας ευθείας (ε).



α) Να βρείτε την κλίση λ της ευθείας (ε).

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 05)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ, στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

20868-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού η ευθεία (ε) διέρχεται από τα σημεία A, B έχει κλίση $\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$.

β) Ως γνωστόν, η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ και έχει κλίση λ είναι η $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$.

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ και έχει κλίση $\lambda = \frac{1}{2}$, είναι: $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

γ) Επειδή το σημείο Γ της ευθείας (ε) ανήκει και στον άξονα $x'x$, είναι της μορφής $\Gamma(x, 0)$. Έτσι έχουμε:

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το $\Gamma(-1,0)$.

21964

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται το σημείο Α(4,-2) και η ευθεία (ε_1) με εξίσωση: $x - y + 2 = 0$. Να βρείτε:

α) την ευθεία (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).

(Μονάδες 8)

β) το σημείο τομής Β, των ευθειών (ε_1) και (ε_2): $y = -x + 2$. (Μονάδες 8)

γ) το συμμετρικό Γ του σημείου Α, ως προς την ευθεία (ε_1). (Μονάδες 9)

21964-Λύση

ΛΥΣΗ

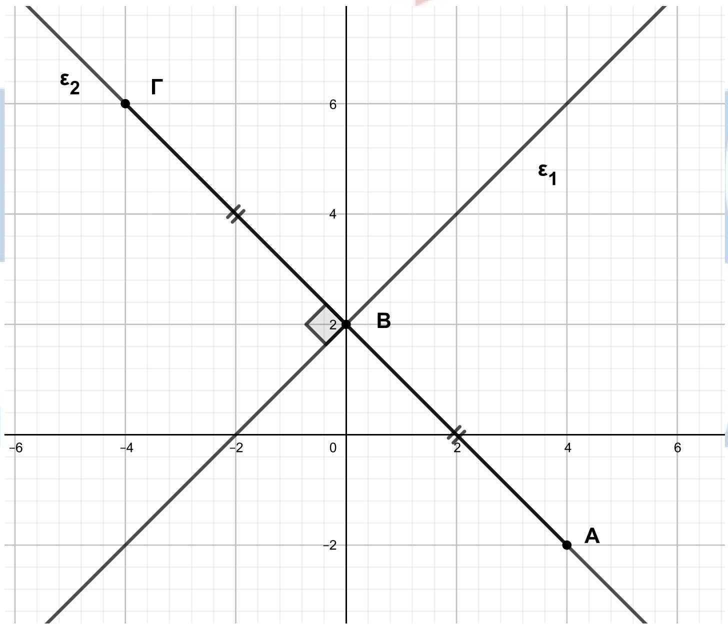
α) Η ευθεία ($ε_1$) έχει εξίσωση: y = x + 2, συνεπώς συντελεστή διεύθυνσης $λ_1 = 1$. Η ευθεία ($ε_2$) είναι κάθετη στην ευθεία $ε_1$, συνεπώς το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των δύο ευθειών θα ισούται με -1, άρα $λ_2 = -1$. Επιπλέον η ευθεία ($ε_2$) διέρχεται από το σημείο Α, άρα η εξίσωσή της θα είναι:

$y - y_A = \lambda_2 \cdot (x - x_A)$ ή y – (-2) = -1·(x – 4) ή y + 2 = -x + 4 ή y = -x + 2. Άρα η εξίσωση της ευθείας ($ε_2$) είναι: y = -x + 2.

β) οι συντεταγμένες του σημείου τομής Β, των δύο ευθειών ($ε_1$) και ($ε_2$) θα προκύψει από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -x + 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = x + 2 \\ 2x = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$. Άρα Β(0,2).

γ) Αν Γ το συμμετρικό του Α ως προς το Β τότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά και μάλιστα το Β είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ, άρα θα ισχύει:

$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} 0 = \frac{4 + x_\Gamma}{2} \\ 2 = \frac{-2 + y_\Gamma}{2} \end{cases}$ ή $\begin{cases} x_\Gamma = -4 \\ y_\Gamma = 6 \end{cases}$. Οπότε το συμμετρικό του σημείο Α ως προς την ευθεία (ε1) είναι το σημείο Γ(-4,6).



21965

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία Α(2, -4) και Β(0, -2)

α) Να βρείτε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(Μονάδες 5)

γ) Αν (ζ): y = x – 4 και (ε): y = 2·x-6, τότε να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ζ), (ε). (Μονάδες 9)

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία (ε) είναι η $(x-2)^2+(y+2)^2=4$. (Μονάδες 7)

21965-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ ισχύει: Μ($\frac{x_A+x_B}{2}$, $\frac{y_A+y_B}{2}$) ή Μ($\frac{2+0}{2}$, $\frac{-4+(-2)}{2}$) ή Μ(1, -3).

β) Η κλίση του ΑΒ είναι λ_{AB} = $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ = $\frac{-2-(-4)}{0-2}$ = $\frac{2}{-2}$ = -1. Η κλίση της μεσοκαθέτου (ζ) του ΑΒ θα πρέπει να είναι λ = 1 (αφού το γινόμενο των δύο κλίσεων θα πρέπει να ισούται με -1). Η εξίσωση της μεσοκαθέτου (ζ) του τμήματος ΑΒ θα είναι: $y- \ y_M = \lambda \cdot (x- \ x_M)$ ή y - (-3) = 1 (x – 1) ή y + 3 = x - 1 ή y = x - 4.

γ) το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) θα έχει συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος:

$\begin{cases} y = x - 4 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$ ή x – 4 = 2x – 6 ή x = 2 και y = -2. Άρα το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι το σημείο (2, -2).

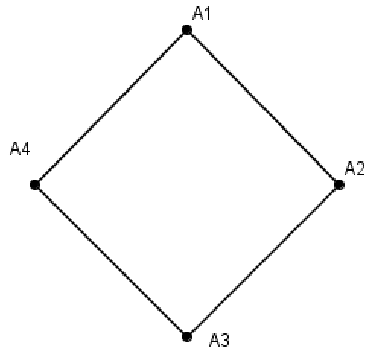
γ) το κέντρο Κ του κύκλου θα πρέπει να ανήκει ταυτόχρονα στη μεσοκάθετο του τμήματος ΑΒ, την ευθεία (ζ) και στην ευθεία (ε) άρα θα πρέπει να είναι το σημείο τομής τους που βρήκαμε στο ερώτημα β), δηλαδή το Κ(2, -2). Η ακτίνα του κύκλου θα είναι ρ = (ΚΑ) = (ΚΒ) αλλά ρ = (ΚΒ) = $\sqrt{(2-0)^2+(-2+2)^2}$ = $\sqrt{4+0}$ = 2.

Η εξίσωση του κύκλου θα είναι: $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

22047

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές $Α_1$, $Α_2$, $Α_3$, $Α_4$. Έστω $λ_1, λ_2, λ_3, λ_4$ οι κλίσεις των ευθειών $Α_1Α_2$, $Α_2Α_3$, $Α_3Α_4$, $Α_4Α_1$ αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο παράλληλων πλευρών;

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{λ_1}{λ_3}+\frac{λ_2}{λ_4}=2$.

(Μονάδες 10)

22047-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα ζεύγη των παράλληλων πλευρών του τετραγώνου είναι δύο:

(i) $A_1A_2 \parallel A_3A_4$, με αντίστοιχες κλίσεις $\lambda_1 = \lambda_3$ και

(ii) $A_2A_3 \parallel A_4A_1$, με αντίστοιχες κλίσεις $\lambda_2 = \lambda_4$.

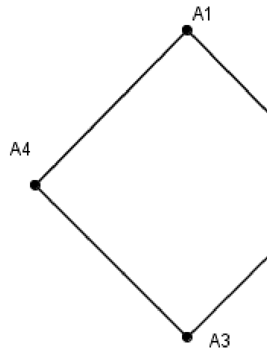
β) Αφού, από το α) ερώτημα, είναι $\lambda_1 = \lambda_3$ και $\lambda_2 = \lambda_4$, έχουμε :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_4} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2} = 1 + 1 = 2 \,.$$

22049

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τετράγωνο του σχήματος με κορυφές A_1, A_2, A_3, A_4. Έστω λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 οι κλίσεις των ευθειών A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 αντίστοιχα.



α) Να βρείτε όλα τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους. Ποιά σχέση συνδέει τις κλίσεις κάθε δύο κάθετων πλευρών;

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1 = -4$.

(Μονάδες 10)

22049-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα ζεύγη των πλευρών του τετραγώνου που είναι κάθετες μεταξύ τους είναι τέσσερα:

(i) $A_1A_2 \perp A_2A_3$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_1, λ_2 και $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

(ii) $A_2A_3 \perp A_3A_4$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_2, λ_3 και $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1$.

(iii) $A_3A_4 \perp A_4A_1$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_3, λ_4 και $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = -1$.

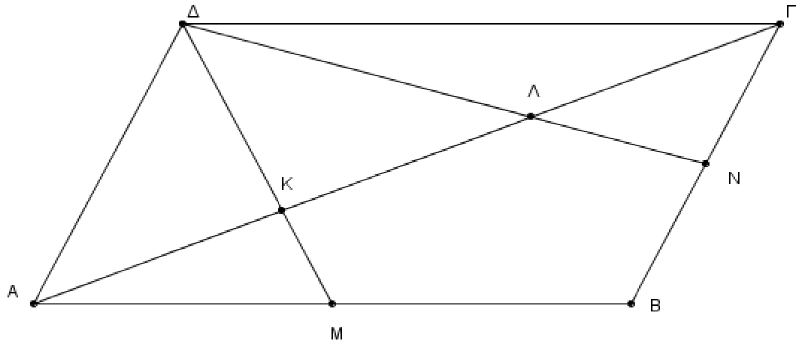
(iv) $A_4A_1 \perp A_1A_2$, με αντίστοιχες κλίσεις λ_4, λ_1 και $\lambda_4 \cdot \lambda_1 = -1$.

β) Από το α) ερώτημα, κάθε προσθετέος του αθροίσματος: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 + \lambda_3 \cdot \lambda_4 + \lambda_4 \cdot \lambda_1$ είναι ίσος με -1, επομένως το άθροισμα ισούται με -4.

22065

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(8,0)$, $\Gamma(10,4)$, $\Delta(2,4)$. Τα σημεία M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, ενώ K και Λ είναι τα σημεία που τέμνουν τα τμήματα ΔM και ΔN την διαγώνιο $A\Gamma$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $A\Gamma, \Delta M, \Delta N$ και στη συνέχεια τις συντεταγμένες των σημείων K και Λ.

(Μονάδες 10)

δ) Να δείξετε ότι τα σημεία K και Λ τριχοτομούν την διαγώνιο $A\Gamma$, δηλαδή την χωρίζουν σε τρία ίσα τμήματα.

(Μονάδες 5)

22065-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το σημείο $A(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων. Επομένως,

$\overrightarrow{A\Delta}=(2,4)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=(10,4)-(8,0)=(2,4)$, οπότε $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}$, άρα $A\Delta =\parallel B\Gamma$, συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, τότε

$M(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2})$ ή ισοδύναμα $M(\frac{0+8}{2},\frac{0+0}{2})$, δηλαδή $M(4,0)$.

$N(\frac{x_B+x_\Gamma}{2},\frac{y_B+y_\Gamma}{2})$ ή ισοδύναμα $N(\frac{8+10}{2},\frac{0+4}{2})$, δηλαδή $N(9,2)$.

γ) Εξίσωση της ευθείας ΑΓ: $\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}\Leftrightarrow \frac{y-0}{x-0}=\frac{4-0}{10-0}\Leftrightarrow y=\frac{2}{5}x$ (1).

Εξίσωση της ευθείας ΔΜ: $\frac{y-y_M}{x-x_M}=\frac{y_\Delta-y_M}{x_\Delta-x_M}\Leftrightarrow \frac{y-0}{x-4}=\frac{4-0}{2-4}\Leftrightarrow y=-2x+8$ (2).

Εξίσωση της ευθείας ΔΝ: $\frac{y-y_N}{x-x_N}=\frac{y_\Delta-y_N}{x_\Delta-x_N}\Leftrightarrow \frac{y-2}{x-9}=\frac{4-2}{2-9}\Leftrightarrow y-2=\frac{-2}{7}(x-9)\Leftrightarrow y=\frac{-2}{7}x+\frac{32}{7}$ (3).

Το σημείο K είναι σημείο τομής των ευθεών ΑΓ και ΔΜ, συνεπώς οι συντεταγμένες του είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2): $y=\frac{2}{5}x$ και $y=-2x+8$. Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη έχουμε $\frac{2}{5}x=-2x+8$ δηλαδή $x=\frac{10}{3}$, άρα $K(\frac{10}{3},\frac{4}{3})$.

Το σημείο Λ είναι σημείο τομής των ευθεών ΑΓ και ΔΝ, συνεπώς οι συντεταγμένες του είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων (1) και (3): $y=\frac{2}{5}x$ και $y=\frac{-2}{7}x+\frac{32}{7}$. Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη έχουμε $\frac{2}{5}x=\frac{-2}{7}x+\frac{32}{7}$ δηλαδή $x=\frac{20}{3}$, άρα $\Lambda(\frac{20}{3},\frac{8}{3})$.

δ) Το σημείο $A(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων και έχουμε:

Από την εκφώνηση: $\overrightarrow{A\Gamma}=(10,4)$

Από την απάντηση του γ) ερωτήματος: $\overrightarrow{AK}=(\frac{10}{3},\frac{4}{3})$ και $\overrightarrow{A\Lambda}=(\frac{20}{3},\frac{8}{3})$.

Άρα, $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{A\Lambda}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$.

Συνεπώς, τα σημεία Κ και Λ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.

22071

ΘΕΜΑ 2

Οι πλευρές ΑΒ και ΑΔ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ έχουν εξισώσεις $x+2y+1=0$ και $2x+y+5=0$ αντίστοιχα και το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο Κ(1,2).

α) Να αποδείξετε ότι:

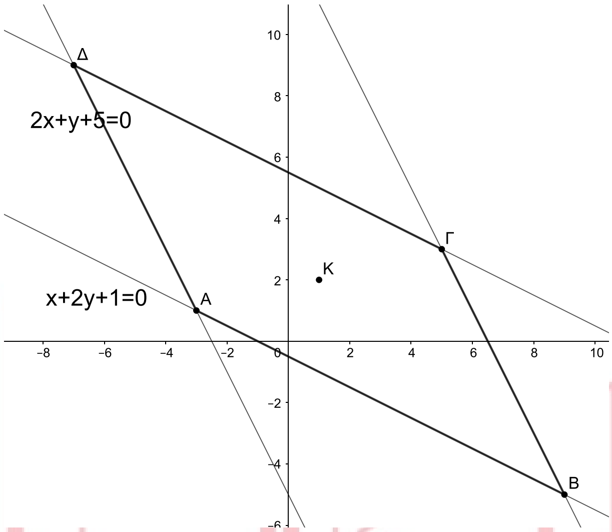
i. Η κορυφή Α του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Α(-3, 1). (Μονάδες 08)

ii. Η κορυφή Γ του παραλληλογράμμου έχει συντεταγμένες Γ(5, 3). (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των άλλων δύο πλευρών του ΒΓ και ΓΔ. (Μονάδες 10)

22071-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Έστω ΑΒΓΔ το παραλληλόγραμμο στο οποίο είναι ΑΒ: x+2y+1=0 και ΑΔ: 2x+y+5=0.

Το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΑΔ είναι το σημείο Α, του οποίου οι συντεταγμένες προκύπτουν από τη λύση του παρακάτω συστήματος.

$$(\Sigma): \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4y-2=0 \\ \ \ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y+3=0 \\ 2x+y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

Άρα Α(-3, 1).

ii. Το σημείο Κ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου, οπότε είναι το μέσο του τμήματος ΑΓ. Αν $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, τότε για το σημείο Κ έχουμε, $K\left(\frac{-3+x_\Gamma}{2}, \frac{1+y_\Gamma}{2}\right)$. Όμως οι συντεταγμένες του Κ είναι (1,2), οπότε $\frac{-3+x_\Gamma}{2} = 1 \Leftrightarrow x_\Gamma = 5$ και $\frac{1+y_\Gamma}{2} = 2 \Leftrightarrow y_\Gamma = 3$.

Άρα Γ(5,3).

β) Η πλευρά ΒΓ διέρχεται από το σημείο Γ(5,3) και ΒΓ//ΑΔ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΔ είναι: 2x+y+5=0 με $\lambda_{A\Delta} = -2$. Άρα $\lambda_{B\Gamma} = -2$, οπότε η εξίσωση της ΒΓ είναι

$$B\Gamma: y-y_\Gamma = -2(x-x_\Gamma) \text{ ή } y-3 = -2\cdot(x-5) \Leftrightarrow 2x+y-13=0.$$

Η πλευρά ΓΔ διέρχεται από το Γ(5,3) και ΓΔ//ΑΒ. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ είναι x+2y+1=0 με $\lambda_{AB} = -\frac{1}{2}$. Άρα $\lambda_{\Gamma\Delta} = -\frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση της ΓΔ είναι:

$$\Gamma\Delta: y-y_\Gamma = -\frac{1}{2}(x-x_\Gamma) \text{ ή } y-3 = -\frac{1}{2}(x-5) \Leftrightarrow x+2y-11=0$$

22173

ΘΕΜΑ 2

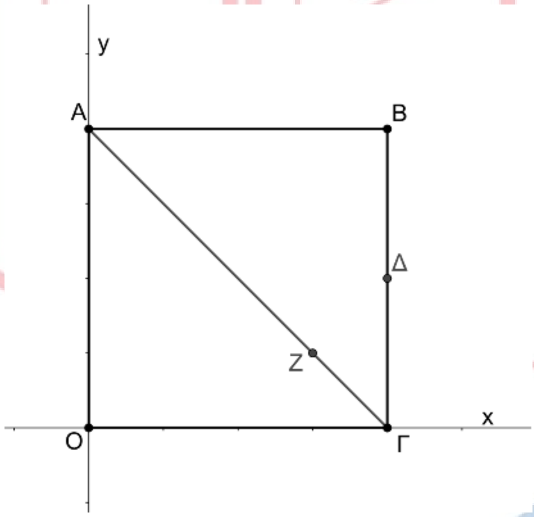
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΟ με κορυφές τα σημεία Α(0,4), Β(4,4), Γ(4,0), Ο(0,0). Στην διαγώνιο ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AZ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$. Επίσης, θεωρούμε το μέσο Δ της ΒΓ.

α) Να βρείτε:

i. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 07)

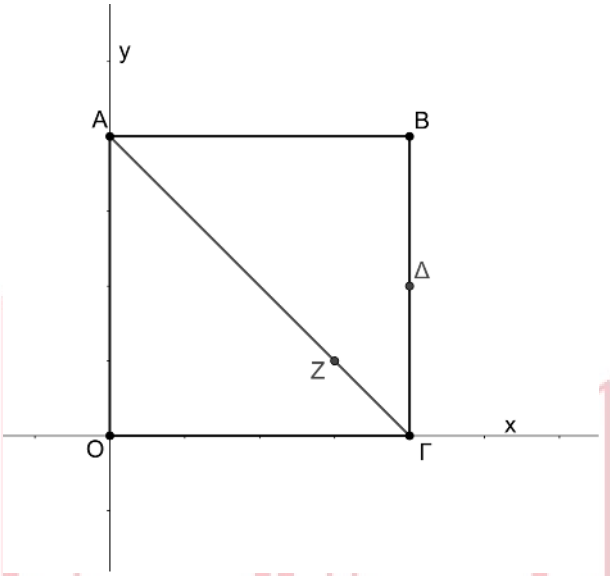
ii. Τις συντεταγμένες του σημείου Ζ. (Μονάδες 09)

β) Αν το σημείο Δ είναι το (4,2) και το σημείο Ζ το (3,1), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΔ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. (Μονάδες 09)



22173-Λύση

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι συντεταγμένες του μέσου Δ του ΒΓ δίνονται από τους τύπους

$$x_\Delta = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = \frac{4+4}{2} = 4 \text{ και } y_\Delta = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Επομένως, είναι Δ(4,2).

ii. Έστω Ζ(x,y). Τότε $\overrightarrow{AZ} = \left(x_Z - x_A, y_Z - y_A\right) = (x-0, y-4) = (x, y-4)$ και

$\overrightarrow{A\Gamma} = \left(x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A\right) = (4-0, 0-4) = (4,-4)$.

Όμως $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$, άρα $(x, y-4) = \frac{3}{4}(4,-4) = (3,-3)$.

Επομένως x = 3 και y – 4 = -3, δηλαδή y = 1. Άρα, είναι Ζ(3,1).

β) Από το ερώτημα β) έχουμε ότι $\overrightarrow{AZ} = (3,-3)$.

$\overrightarrow{Z\Delta} = \left(x_\Delta - x_Z, y_\Delta - y_Z\right) = \left(4-3, 2-1\right) = (1,1)$.

$\overrightarrow{AZ} \cdot \overrightarrow{Z\Delta} = (3,3)\cdot(1,-1) = 3-3 = 0$. Επομένως τα διανύσματα είναι κάθετα. Το ίδιο θα ισχύει

και για τους φορείς τους, δηλαδή ΑΓ κάθετη στην ΖΔ.

Εναλλακτική λύση:

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΖ είναι $\lambda_{AZ} = \frac{y_Z - y_A}{x_Z - x_A} = \frac{1-4}{3-0} = -1$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΖΔ είναι $\lambda_{Z\Delta} = \frac{y_\Delta - y_Z}{x_\Delta - x_Z} = \frac{2-1}{4-3} = 1$.

Επειδή $\lambda_{AZ} \cdot \lambda_{Z\Delta} = -1$, οι ευθείες ΑΖ και ΖΔ είναι κάθετες.