

14971

ΘΕΜΑ 2

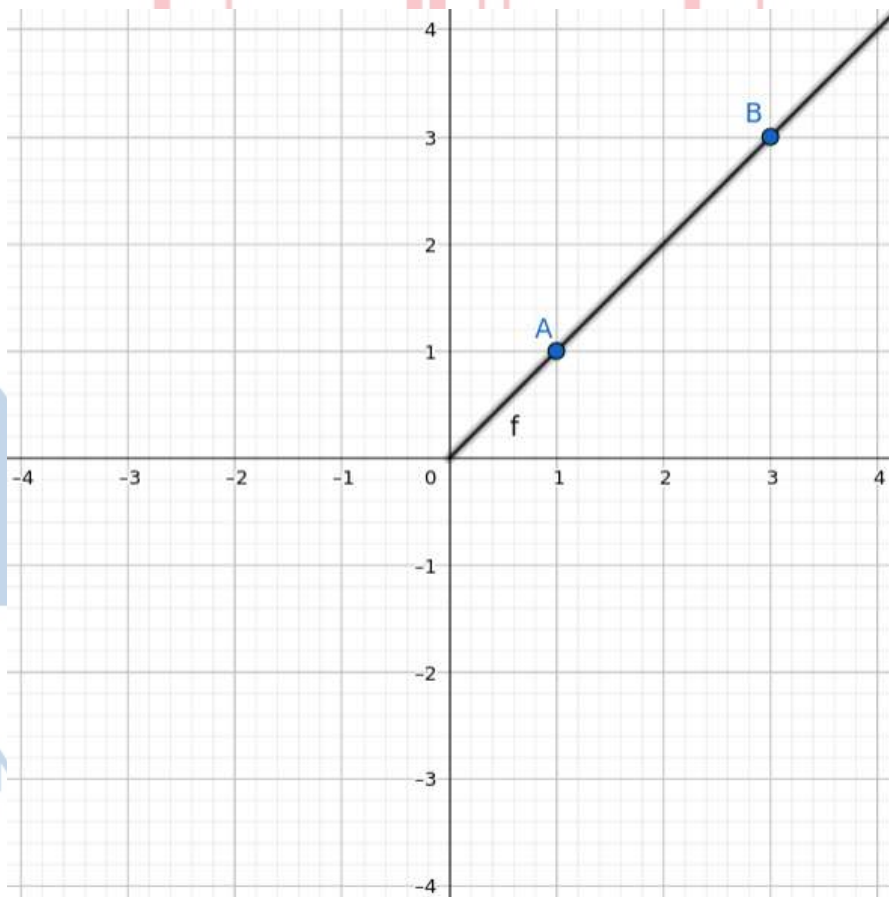
Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,1), B(3,3)$ .

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση  $f$ , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ .

i) είναι σταθερή συνάρτηση                      ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$ , η οποία διέρχεται από τα  $A, B$  και είναι περιττή.



Μονάδες 13

## 14971-Λύση

ΛΥΣΗ

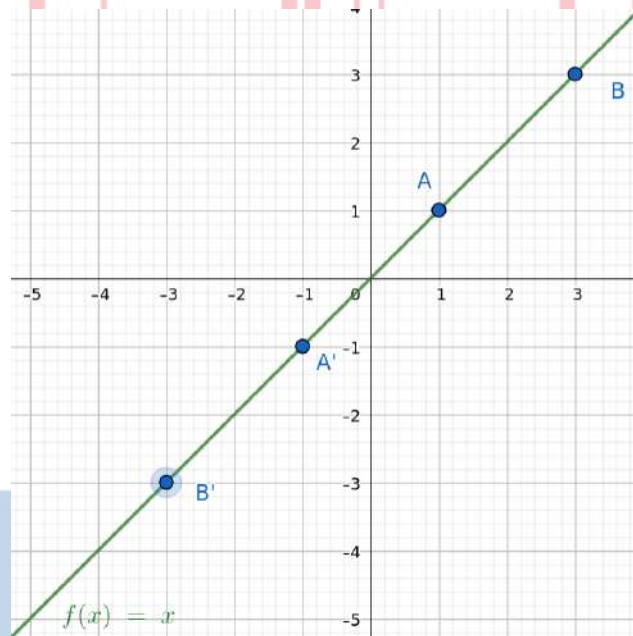
α) Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι σταθερή, αφού  $f(1)=1 \neq 3=f(3)$ .

Η συνάρτηση δε θα μπορούσε να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού  $1 < 3$  ενώ  $f(1)=1 < 3=f(3)$ .

β) Εφόσον η συνάρτηση θέλουμε να είναι περιττή και να διέρχεται από τα A,B θα διέρχεται και από τα σημεία  $A'(-1, -1), B'(-3, -3)$ .

Επίσης, θα είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

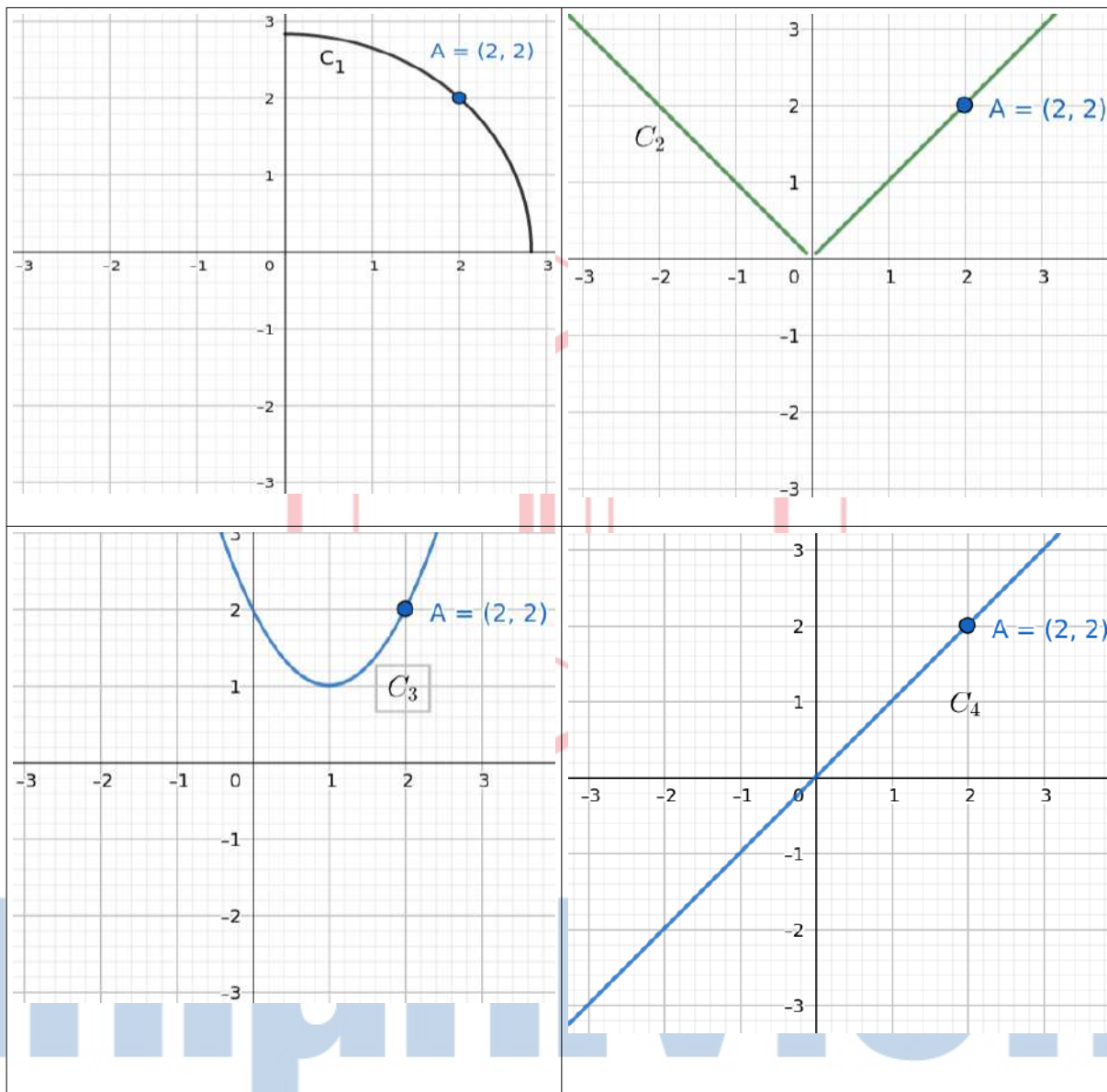
Μία τέτοια συνάρτηση είναι η  $f(x)=x$ , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις  $C_1, C_2, C_3, C_4$  αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

(Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις  $C_2, C_4$  να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους  $B(-2, k)$ , αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

## 14976-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η  $C_1$  δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.

Η  $C_2$  θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα  $y' y$ .

Η  $C_3$  δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα  $y' y$ , ούτε ως προς την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

Η  $C_4$  θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η  $C_2$  είναι η άρτια και  $C_4$  είναι η περιττή.

β) Αν η  $C_2$  είναι άρτια, τότε  $f(-2)=f(2)=2$ , άρα  $k=2$ .

Αν η  $C_4$  είναι περιττή, τότε  $f(-2)=-f(2)=-2$ , άρα  $k=-2$ .

αλημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 2

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(\alpha, 3)$  είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$ .

α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

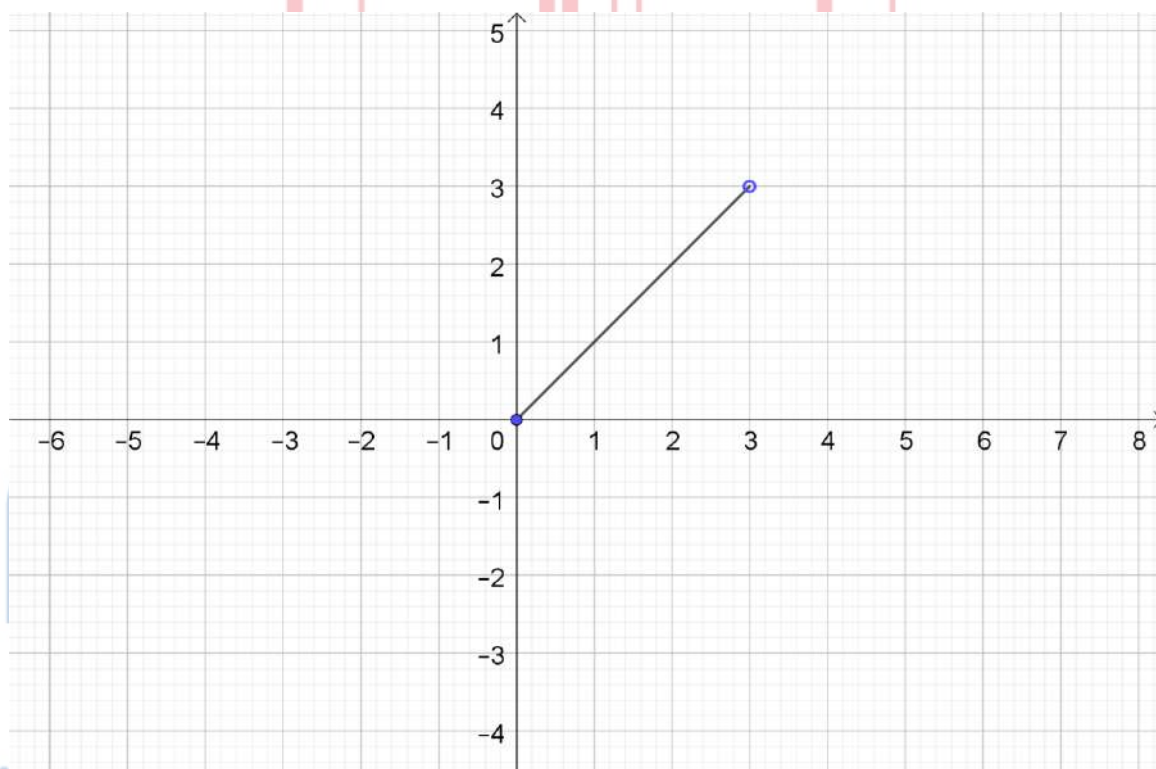
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το  $f(-2)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 3)$ . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



## 15017-Λύση

ΛΥΣΗ

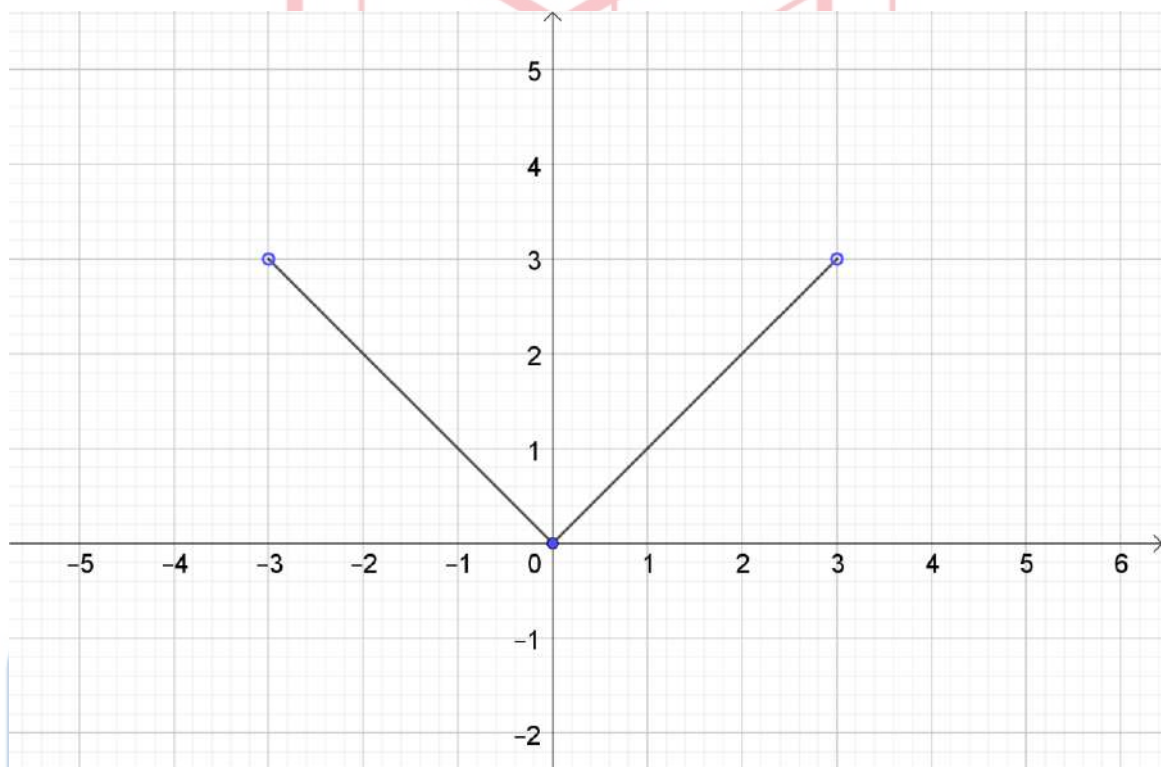
α) Αφού η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(\alpha, 3)$  είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε  $x \in (\alpha, 3)$  και  $-x \in (\alpha, 3)$ . Αυτό ισχύει αν και μόνο αν  $\alpha = -3$ .

β) Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$ , οπότε  $f(2) = 2$ .

Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, θα πρέπει για κάθε  $x \in (-3, 3)$  να ισχύει  $f(-x) = f(x)$ .

Συνεπώς  $f(-2) = f(2) = 2$ .

γ) Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια η γραφική της παράσταση θα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $yy'$ . Η γραφική της παράσταση στο  $(-3, 3)$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



## ΘΕΜΑ 2

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(\alpha, 6)$  είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(4, 2)$ .

α) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

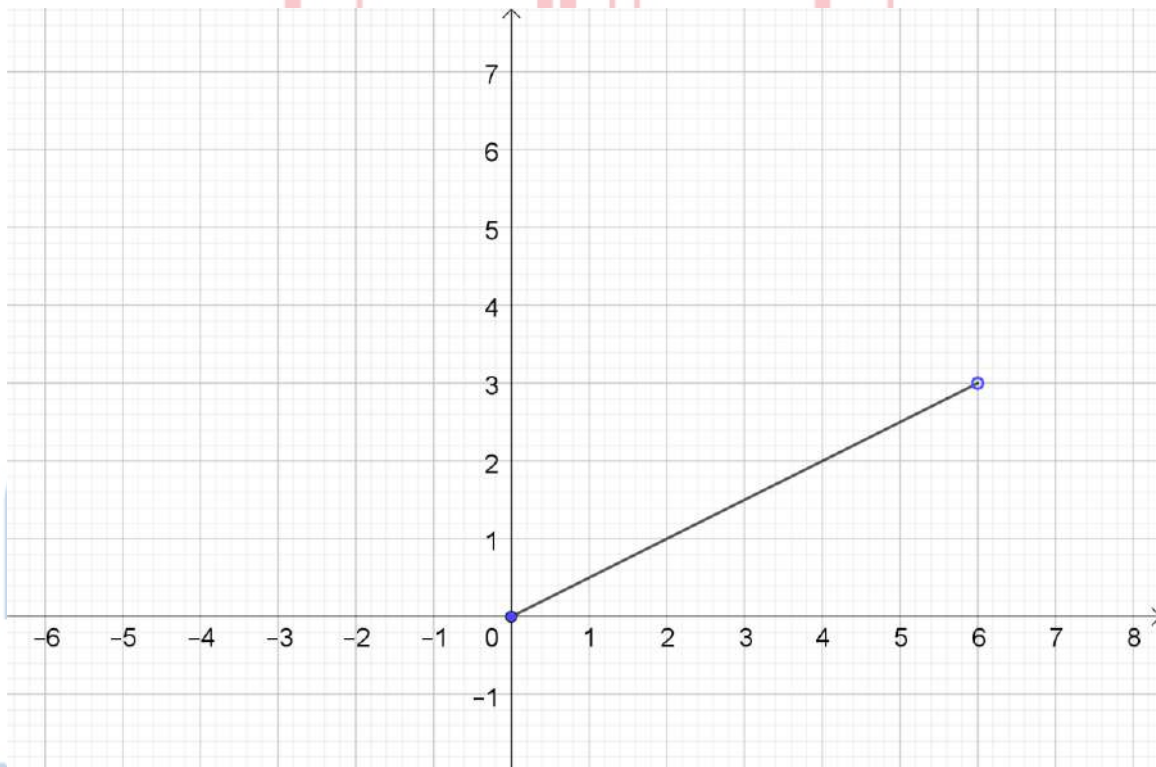
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το  $f(-4)$ .

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 6)$ . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 10)



# 15018-Λύση

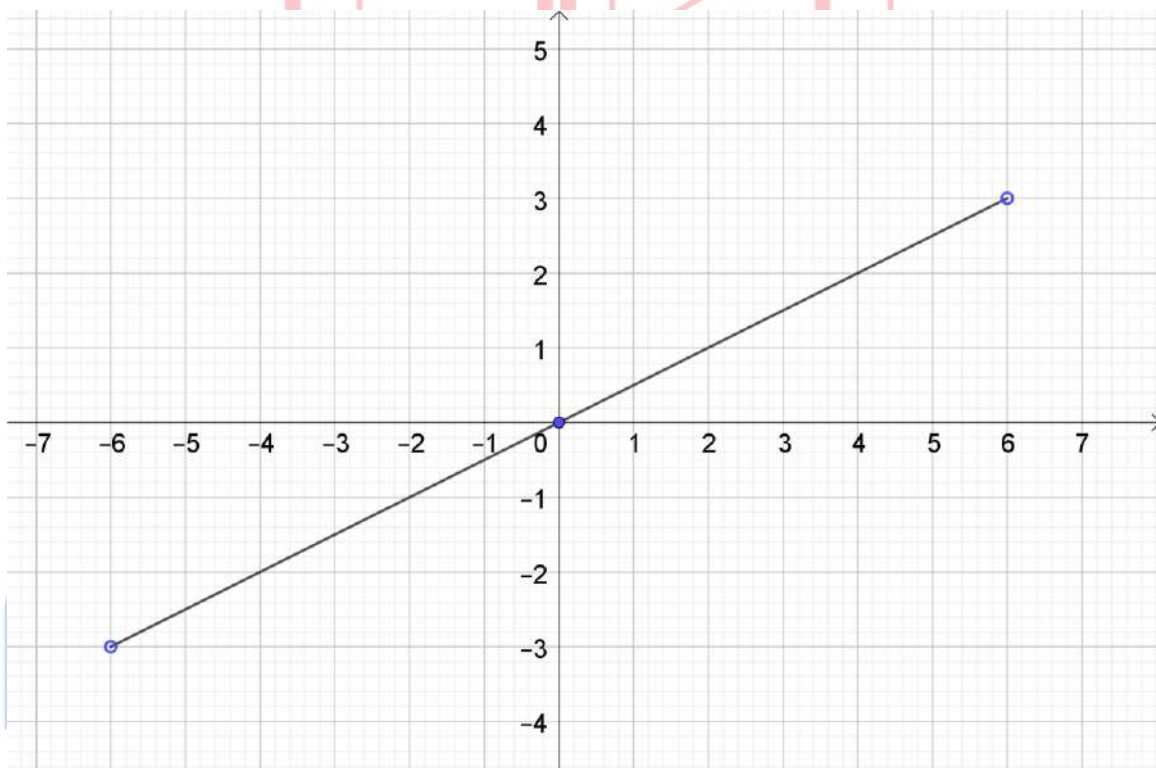
ΛΥΣΗ

α) Αφού η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(\alpha, \beta)$  είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε  $x \in (\alpha, \beta)$  και  $-x \in (\alpha, \beta)$ . Αυτό ισχύει αν και μόνο αν  $\alpha = -\beta$ .

β) Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $(4, 2)$ , οπότε  $f(4) = 2$ .

Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή, θα πρέπει για κάθε  $x \in (-6, 6)$  να ισχύει  $f(-x) = -f(x)$ . Συνεπώς  $f(-4) = -f(4) = -2$ .

γ) Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή, η γραφική της παράσταση θα έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο  $O(0, 0)$ . Η γραφική της παράσταση στο  $(-6, 6)$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.





15019

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται μία συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει ότι  $f(-1) = 2$  και  $f(1) = 0$ .

Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

α) γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι άρτια .

(Μονάδες 8)

β) γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι περιττή.

(Μονάδες 8)

γ) γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 9)



# αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## 15019-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι  $f(-1) \neq f(1)$  οπότε η  $f$  δεν είναι άρτια.

β) Επίσης  $f(-1) \neq -f(1)$  οπότε η  $f$  δεν είναι περιττή.

γ) Είναι  $f(1) < f(-1)$ , που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα, αφού αν ήταν, θα έπρεπε  $f(-1) < f(1)$ , που δεν ισχύει.



# αθηνάμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-3,3]$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-3,0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0,3]$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(-1) < f(2)$ .

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι  $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in [-3,3]$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

(Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης  $f$ . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$     β.  $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$     γ.  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$     δ.  $f(x) = -\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

# αθηνάμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## 15022-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού  $-2 < -1$  και  $f$  γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-3, 0]$  είναι  $f(-2) > f(-1)$ .

Επίσης  $f$  άρτια οπότε  $f(-2) = f(2)$ . Συνεπώς  $f(-1) < f(2)$ .

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, 3]$ , οπότε  $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in [0, 3]$ .

Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-3, 0]$ , οπότε  $f(-3) \geq f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in [0, 3]$ .

Επίσης  $f$  άρτια οπότε  $f(-3) = f(3)$ .

Συνεπώς  $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in [-3, 3]$ .

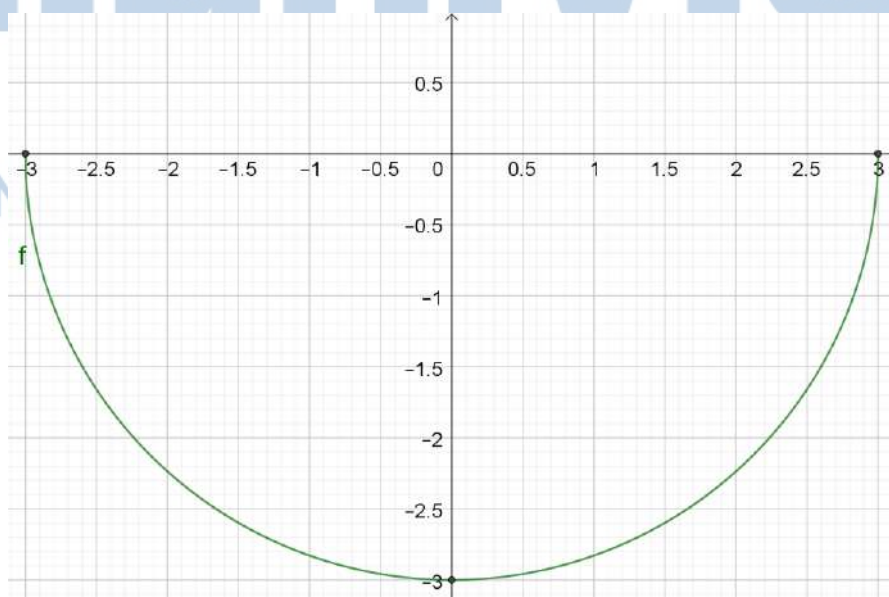
γ) Αφού  $f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in [-3, 3]$ , συμπεραίνουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας  $f(x) > f(0)$  για κάθε  $x \in [-3, 0) \cup (0, 3]$ .

Αφού  $f(x) \leq f(3)$  για κάθε  $x \in [-3, 3]$ , συμπεραίνουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού  $f(-3) = f(3)$ , που είναι και οι μοναδικές θέσεις μέγιστου, αφού λόγω μονοτονίας  $f(x) < f(3)$  για κάθε  $x \in (-3, 3)$ .

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το  $[-3, 3]$ .

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει  $f(0) > f(3)$  οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β.  $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$ .

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της  $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$ .



15024

ΘΕΜΑ 2

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[-4,4]$  φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

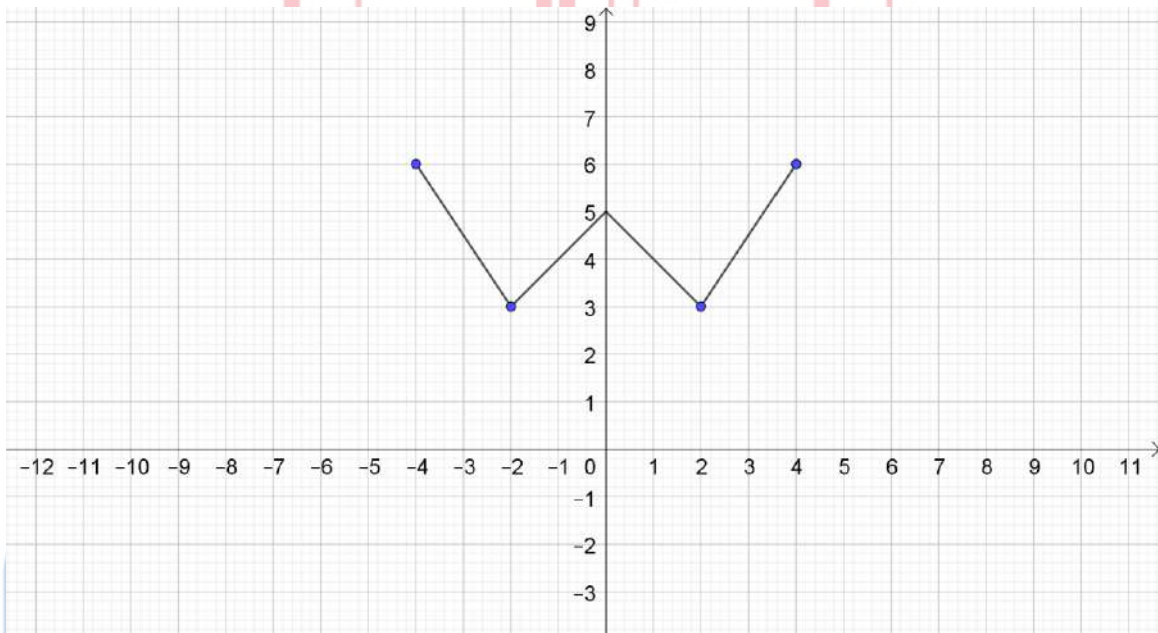
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και για ποιες τιμές του  $x$  τις παρουσιάζει.

(Μονάδες 9)



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## 15024-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $yy'$ , που σημαίνει ότι είναι άρτια.

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[-2,0]$  και στο  $[2,4]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[-4,-2]$  και στο  $[0,2]$ .

γ) Η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο το 3 και οι θέσεις ελαχίστου είναι το -2 και το 2.



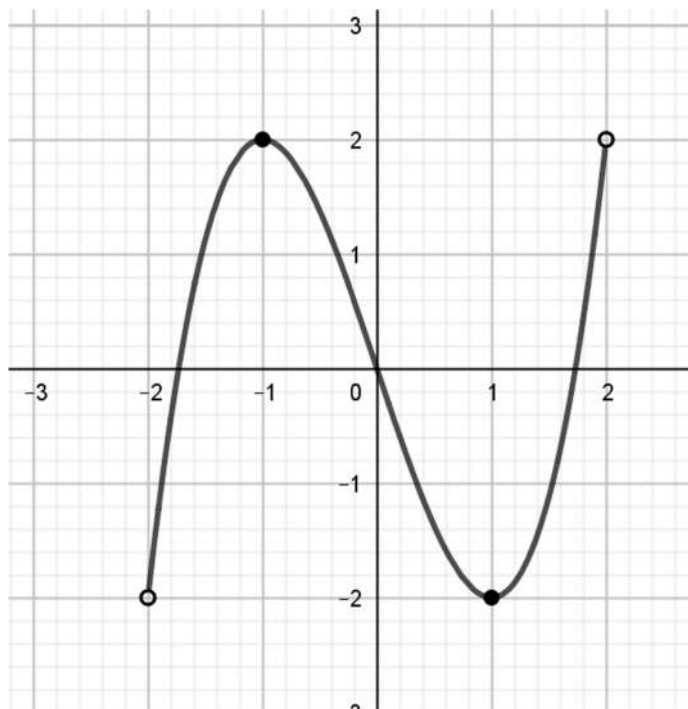
# αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15112

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(-2,2)$ .



α) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 10)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

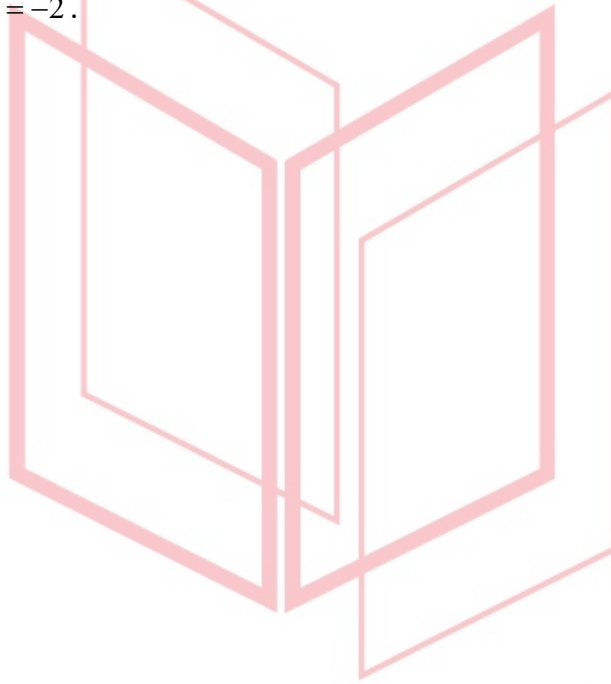
## 15112-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων  $(0,0)$ .

β) Η συνάρτηση  $f$  για  $x \in (-2, -1]$  και  $x \in [1, 2)$  είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για  $x = -1$  η  $f$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της  $f(-1) = 2$  και για  $x = 1$  η  $f$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της  $f(1) = -2$ .



# αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



## ΘΕΜΑ 2

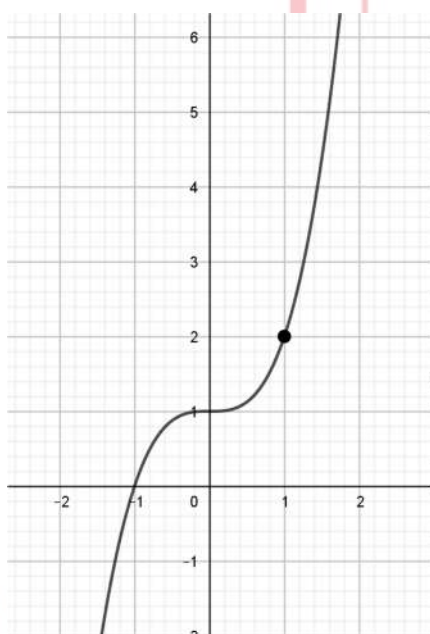
Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$ .

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,9)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

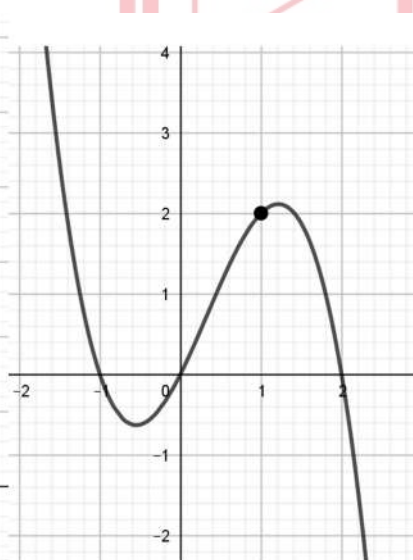
(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

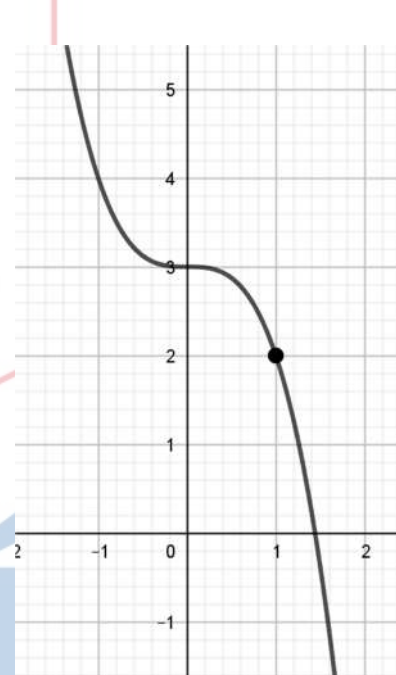
i.



ii.



iii.



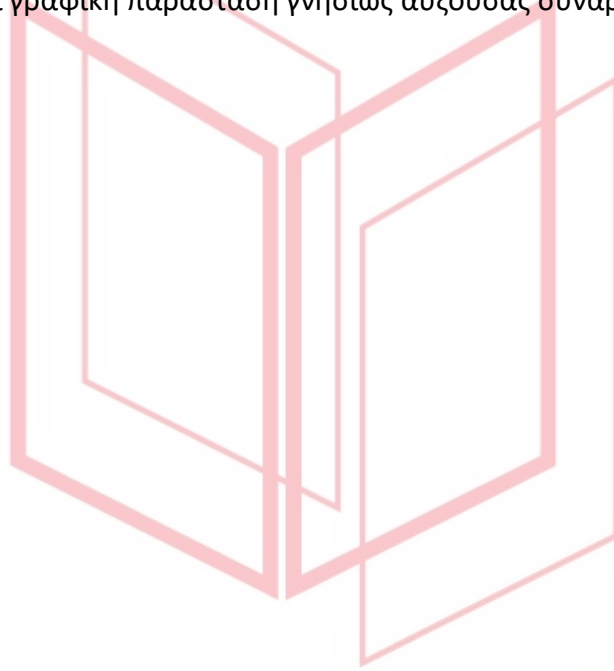
(Μονάδες 12)

## 15114-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το  $A(1,2)$  και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,9)$ , διότι η  $f$  έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ , είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει  $1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2)$ , αφού  $f(1) = 2$  και  $f(2) = 9$ .

β) Η γραφική παράσταση της  $f$  θα μπορούσε να είναι η  $i$ , διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο  $(1,2)$ , η  $i$  είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.



# αθηνάμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 2

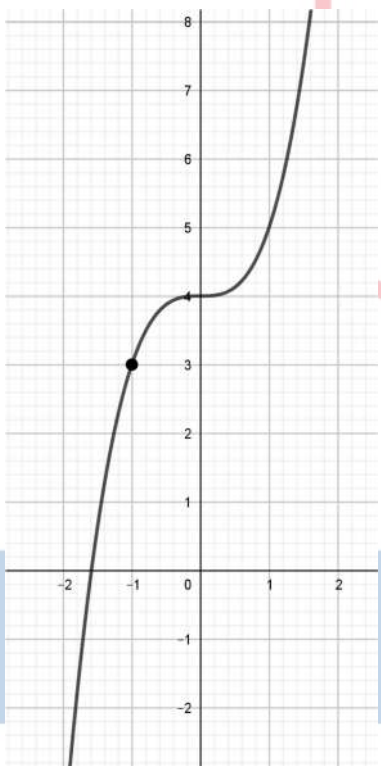
Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$ .

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,5)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

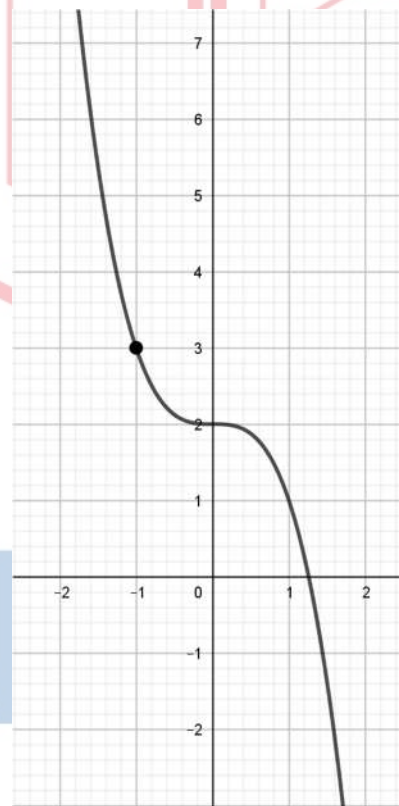
(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

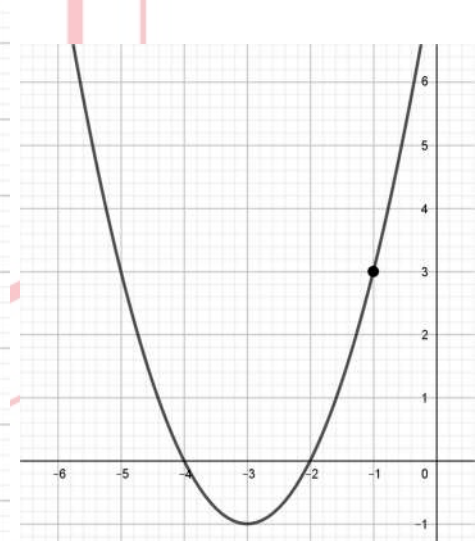
i.



ii.



iii.



(Μονάδες 12)

## 15115-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το  $A(-1,3)$  και δεν θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,5)$ , διότι η  $f$  έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ , είναι όμως γνησίως φθίνουσα και θα έπρεπε να ισχύει  $-1 < 2 \Rightarrow f(-1) > f(2)$ . Όμως  $f(-1) = 3$  και  $f(2) = 5$ .

β) Η γραφική παράσταση της  $f$  θα μπορούσε να είναι η ii. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο  $(-1,3)$ , η ii. είναι γραφική παράσταση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.



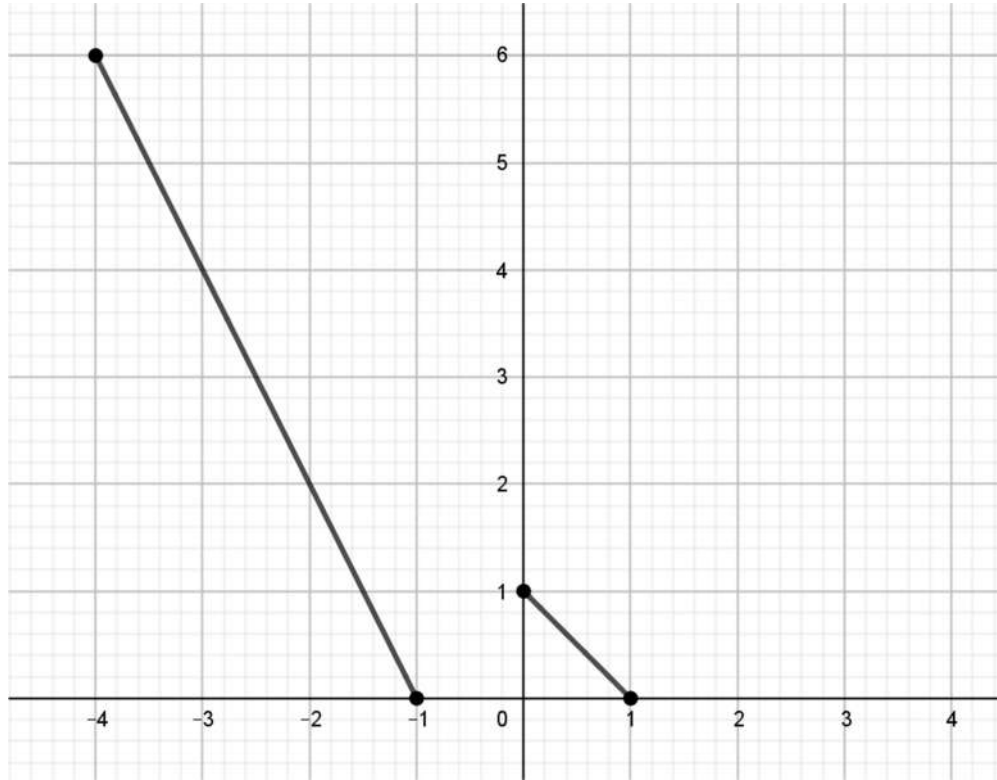
# αθηνάμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

15116

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-4, 4]$ .



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της  $f$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

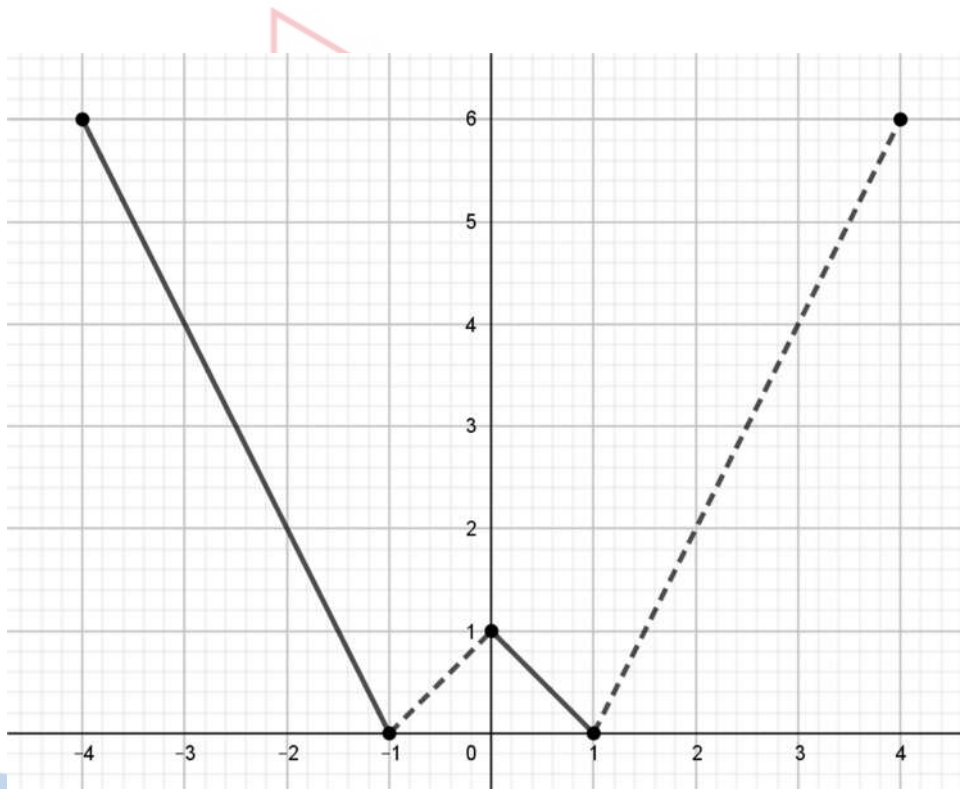
ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 9)

## 15116-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον  $y'y$  άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.



β)

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα  $[-4, -1]$  και  $[0, 1]$ , γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του  $x$ , μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του  $y$ .

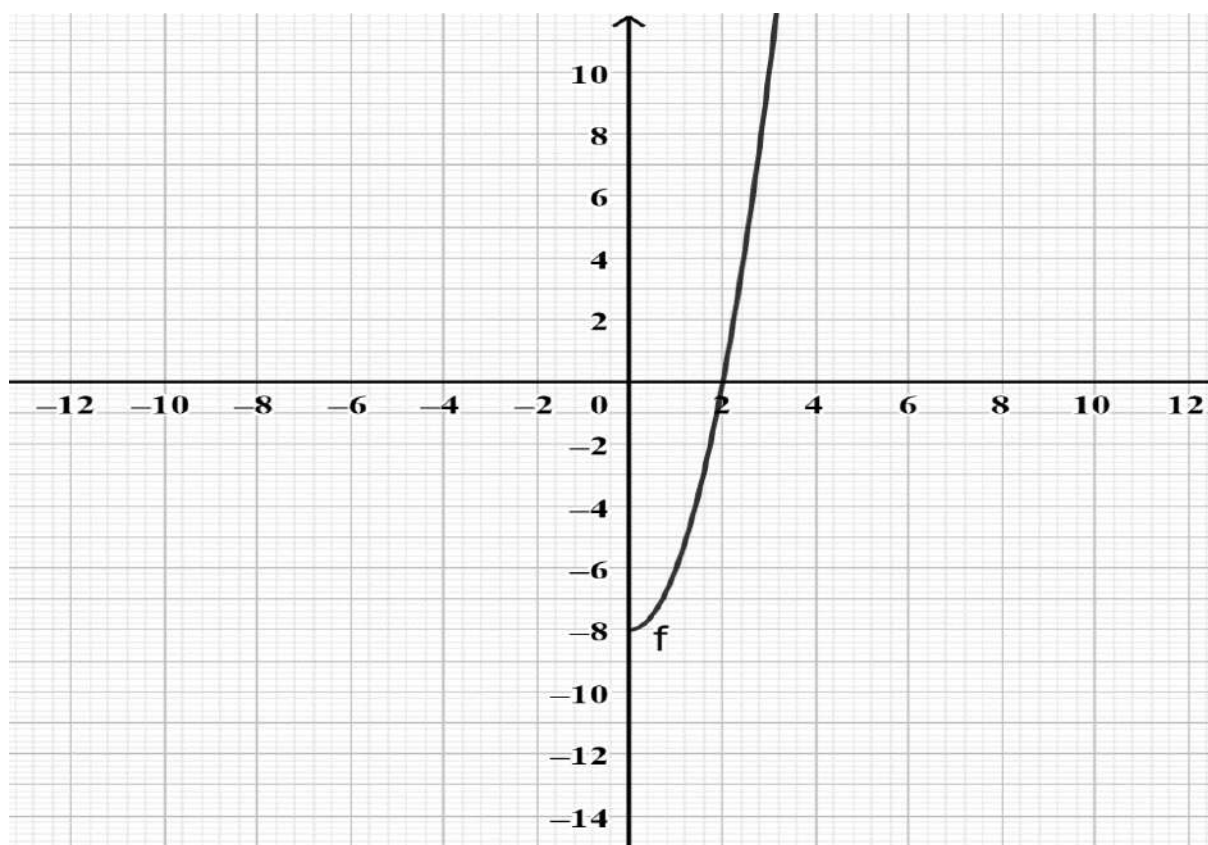
ii. Η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το  $x$  πάρει τις τιμές  $-4$  και  $4$ , δηλαδή

$$\max f(x) = f(-4) = f(4) = 6$$

και η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το  $x$  πάρει τις τιμές  $-1$  και  $1$ , δηλαδή

$$\min f(x) = f(-1) = f(1) = 0.$$

## ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

α) Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

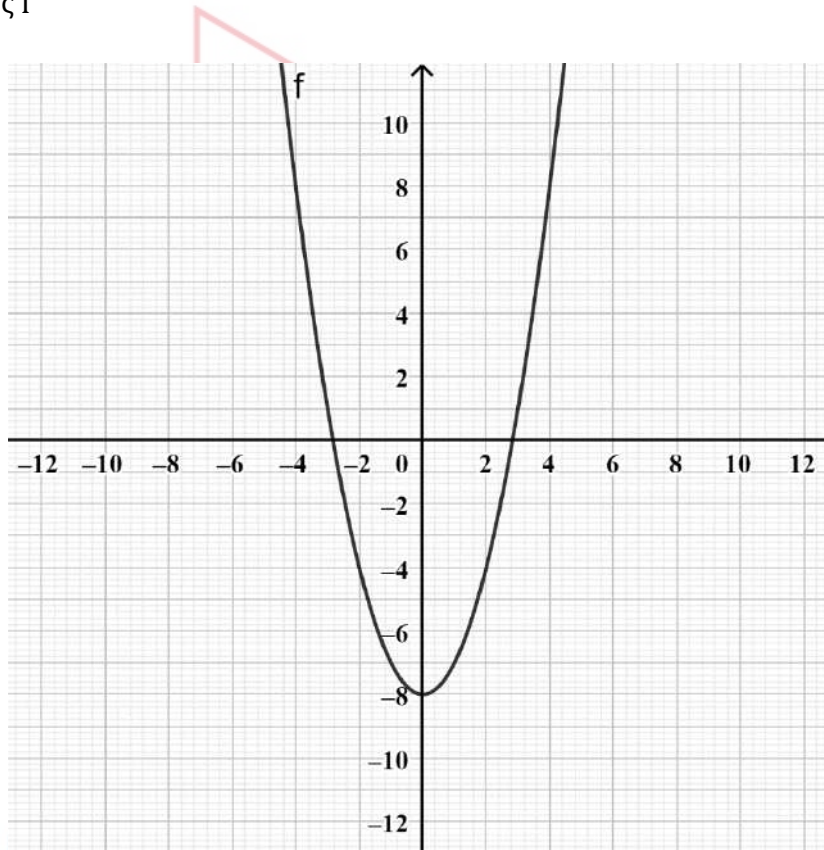
ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)

## 15372-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως, έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ . Το κομμάτι της συνάρτησης που λείπει είναι το συμμετρικό ως προς τον άξονα  $y'y$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$



β)

i. Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι

- για  $x \in (-\infty, 0]$  η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα ενώ
- για  $x \in [0, +\infty)$  η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

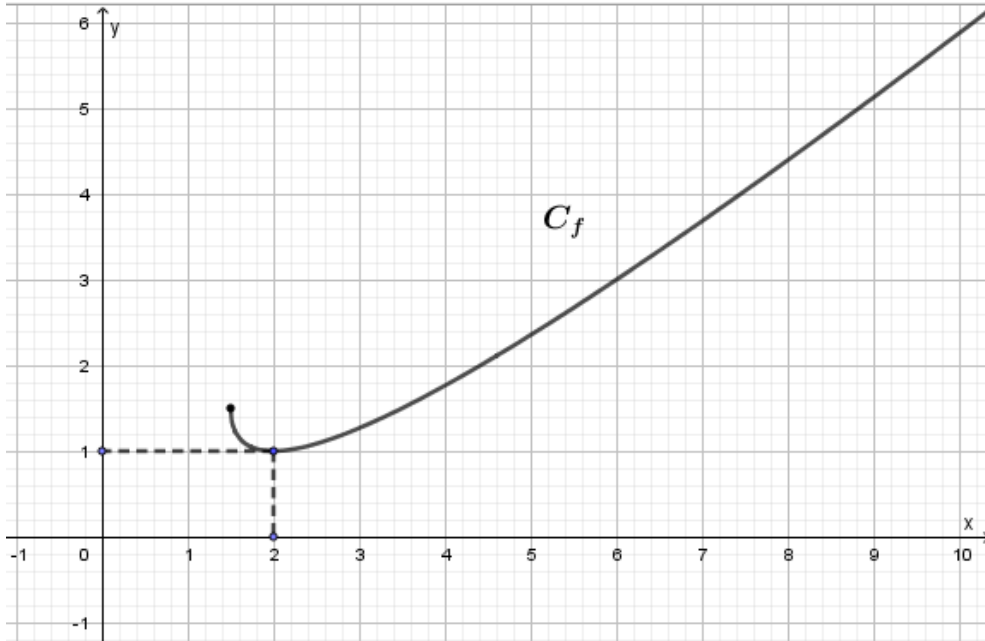
ii. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βλέπουμε ότι έχει ελάχιστη τιμή το  $-8$  για  $x=0$ .



15437

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$ , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

I. γνησίως φθίνουσα

(Μονάδες 5)

II. γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 5)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## 15437-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί  $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ .

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ .

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 1 και παρουσιάζεται όταν  $x = 2$ .

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση  $f$ :

- I. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ,
- II. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[2, +\infty)$ .

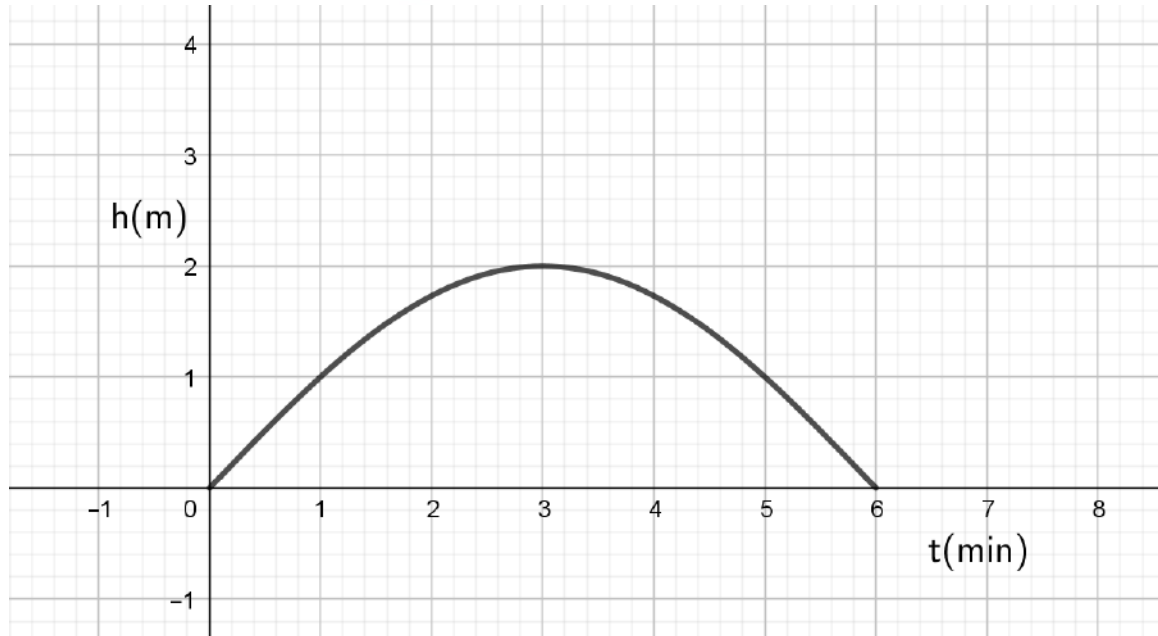


# αθηνάμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 2

Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος  $h$  του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Να βρείτε:



α) Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει  $1m$  από το έδαφος.

(Μονάδες 5)

β) Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει.

(Μονάδες 10)

γ) Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος.

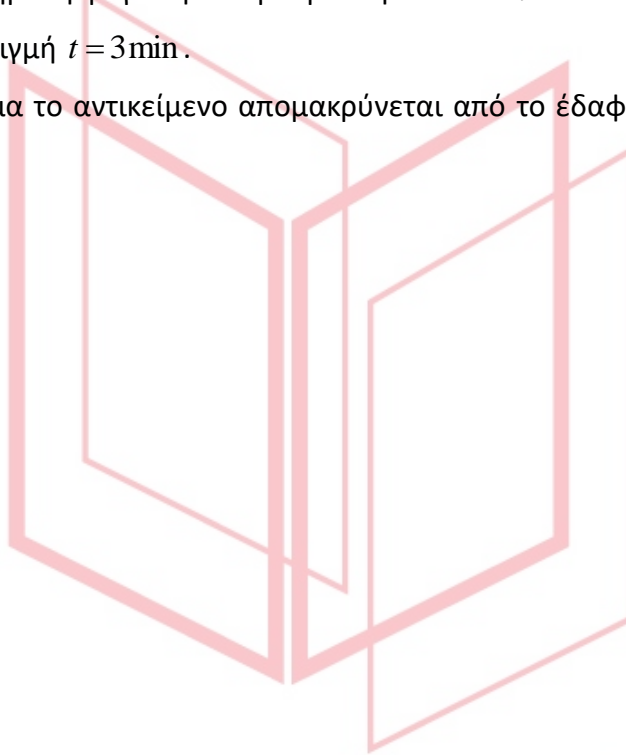
(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Το αντικείμενο απέχει από το έδαφος  $1m$  όταν το σημείο της γραφικής παράστασης έχει τεταγμένη  $1$ , δηλαδή τις χρονικές στιγμές  $1min$  και  $5min$ .

β) Σύμφωνα με το σχήμα η μέγιστη απομάκρυνση είναι  $2m$ . Σε αυτή την θέση το κινητό βρίσκεται τη χρονική στιγμή  $t = 3min$ .

γ) Σύμφωνα με το σχήμα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος το χρονικό διάστημα  $[0,3]$ .

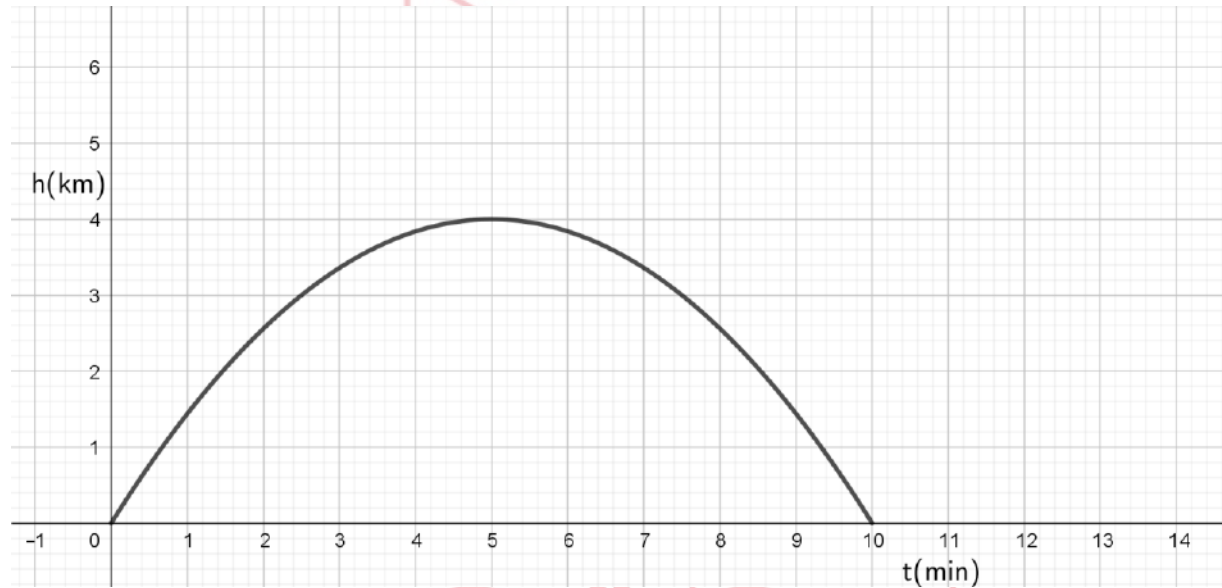


# αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

## ΘΕΜΑ 2

Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



α) Να βρείτε:

i. Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου.

(Μονάδες 5)

ii. Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

(Μονάδες 6)

β) Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος  $1\text{ km}$ .

i. Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη.

(Μονάδες 7)

ii. Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό.

(Μονάδες 7)

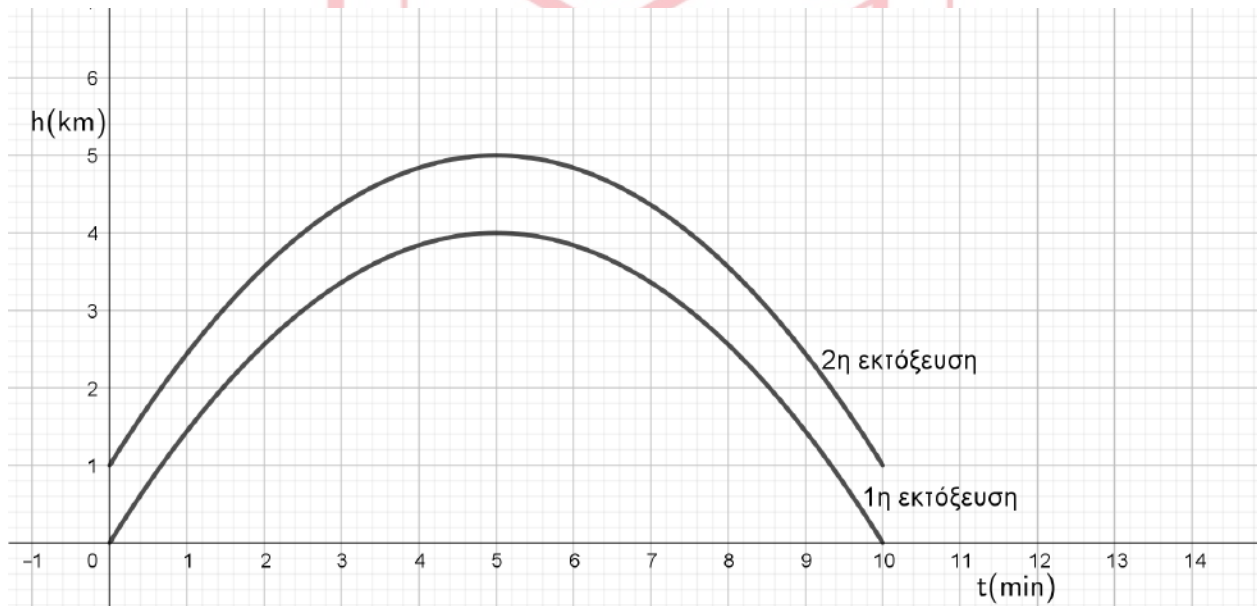
ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το σχήμα:

- i. Ο συνολικός χρόνος κίνησης είναι  $10 \text{ min}$ .
- ii. Το μέγιστο ύψος που ανεβαίνει το μετεωρολογικό όργανο είναι  $4 \text{ km}$  και συνέβη όταν  $t = 5 \text{ min}$ .

β)

- i. Η αποτύπωση της δεύτερης προκύπτει με μεταφορά προς τα πάνω της πρώτης κατά 1.



- ii. Το μέγιστο ύψος που ανεβαίνει το μετεωρολογικό όργανο είναι  $5 \text{ km}$  και συνέβη επίσης όταν  $t = 5 \text{ min}$ .

16129

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f(x)$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

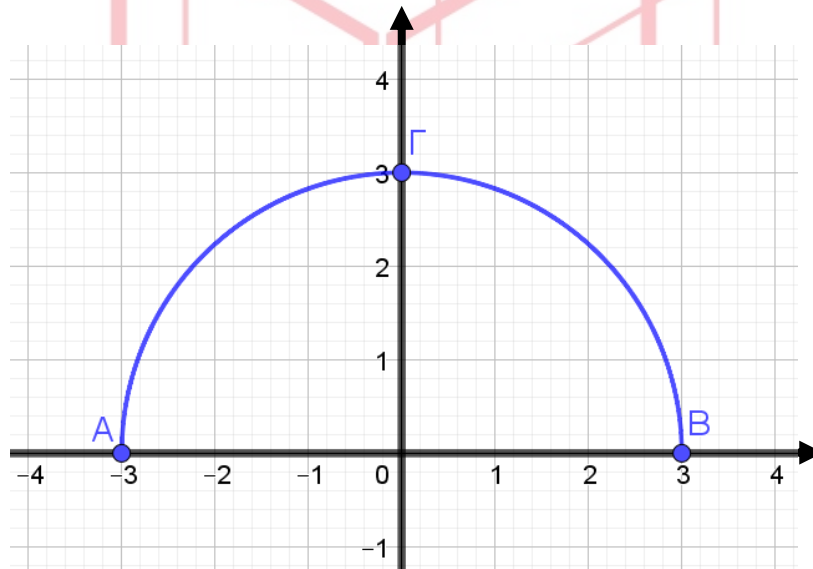
(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της  $f$  και τις θέσεις των ακροτάτων.

(Μονάδες 10)



αθημπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

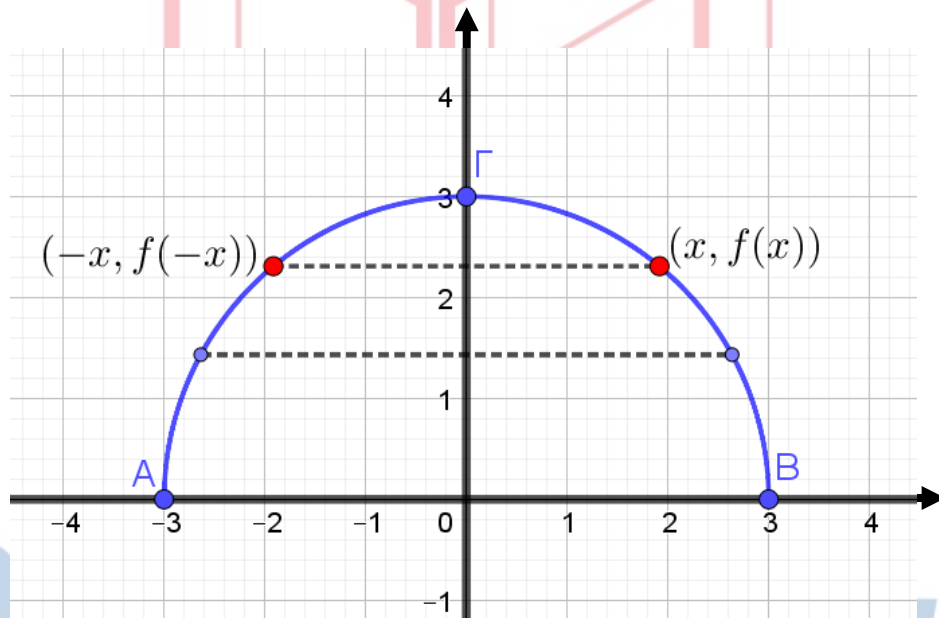
## 16129-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες  $x$  από  $-3$  έως  $3$ . Άρα το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το διάστημα  $\Delta = [-3, 3]$ .

β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ , που σημαίνει ότι τα σημεία  $(x, f(x))$  και  $(-x, f(-x))$  είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα  $y'y$ . Από το σχήμα έχουμε ότι  $f(-x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ , άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή  $3 = f(0)$  είναι η μέγιστη τιμή της  $f$  και η θέση μεγίστου είναι η  $x = 0$ . Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι ο αριθμός  $0 = f(3) = f(-3)$  και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι  $x = 3$  και  $x = -3$ .



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ



# 21164

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο  $A(-2, 8)$  το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης  $f$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f$  να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)

Γραφική παράσταση (β)

Γραφική παράσταση (γ)

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

(Μονάδες 8)

## 21164-Λύση

Λύση

α) Εφόσον η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή θα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και ένα ακόμα σημείο που θα ανήκει στη γραφική της παράσταση θα είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς την αρχή των αξόνων, δηλαδή το  $A'(2, -8)$ .

β) Εφόσον η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη και τα σημεία  $A', A$  ανήκουν σε αυτήν θα ισχύει  $x_{A'} = 2 > -2 = x_A$  και  $y_{A'} = f(x_{A'}) = -8 < 8 = f(x_A) = y_A$ , δηλαδή ισχύει ότι  $x_{A'} > x_A \Rightarrow f(x_{A'}) < f(x_A)$  και η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, άρα θα είναι γνησίως φθίνουσα.

γ) Η γραφική παράσταση (α) είναι γνησίως αύξουσα και η (γ) είναι σταθερή. Μόνο η (β) αντιστοιχεί σε γνησίως φθίνουσα και περιττή. Άρα η γραφική παράσταση (β) μπορεί να είναι της συνάρτησης  $f$ .

# αθιμπινίσις

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ