14666

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων Κ, Λ, και Μ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 7)

14666-Λύση

ΛΥΣΗ:

α) $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} = 3(1,-3) - 5(-2,-1) = (3,-9) - (-10,-5) = (13,-4)$

και

$\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} = 5(1,-3) - 9(-2,-1) = (5,-15) - (-18,-9) = (23,-6)$.

β) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2\left(3\,\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}\right) - \left(5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}\right) = 6\vec{\alpha} - 10\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

γ) $\overrightarrow{K\Lambda} = \vec{w} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και

$\overrightarrow{\Lambda M} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = 2\left(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\right) = 2 \cdot \overrightarrow{K\Lambda}$

Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{\Lambda M}$ είναι παράλληλα, οπότε τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.

15002

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(3,-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$.

(Μονάδες 11)

β)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

(Μονάδες 8)

15002-Λύση

Λύση

α) Αν $\mathit{\Gamma}(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τότε:

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (3,1) \Leftrightarrow (x_\Gamma - 0, y_\Gamma - 5) = (3,1) \Leftrightarrow$$
$$x_\Gamma = 3 \text{ και } y_\Gamma - 5 = 1 \Leftrightarrow y_\Gamma = 6.$$

Άρα, $\mathit{\Gamma}(3,6)$.

β)

i. Είναι

$$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = (4-3, 5-6) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (1,-1).$$

ii. Έχουμε ότι:

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (-3)\cdot 1 = -3 + 3 = 0.$$

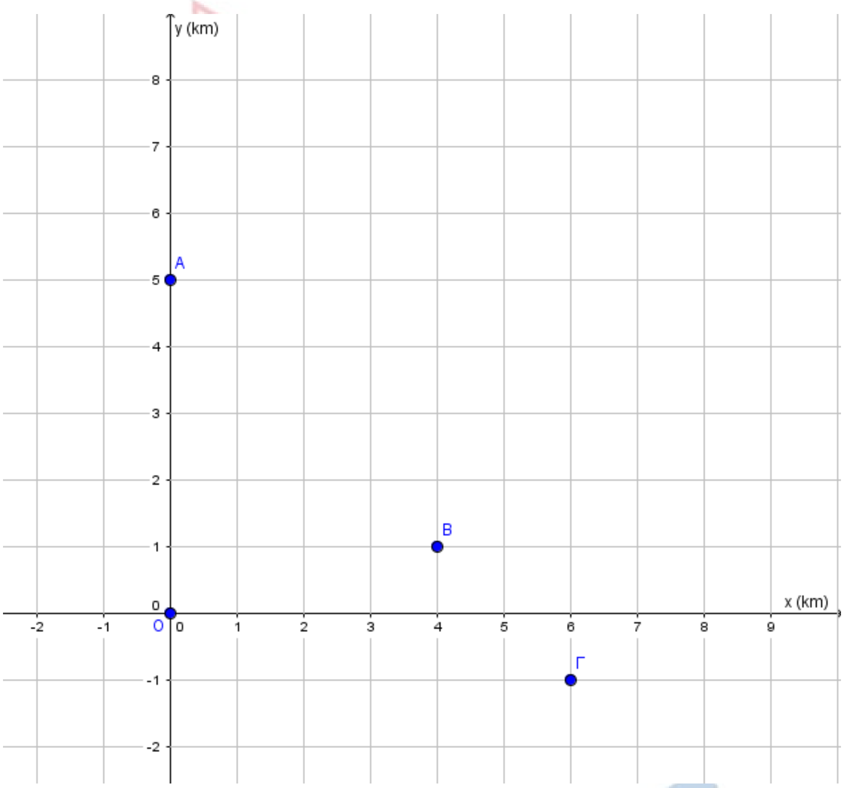
(Εναλλακτικά: $\overrightarrow{AB} = (3,-3) = 3(1,-1) = 3\overrightarrow{\Gamma\Delta}$*.)*

Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα.

15043

ΘΕΜΑ 2

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5), B(4,1)$ και $\Gamma(6,-1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



α)

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

(Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς.

(Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ.

(Μονάδες 12)

15043-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\overrightarrow{AB} = (4-0, 1-5) = (4,-4)$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = (6-4, -1-1) = (2,-2)$.

ii. Είναι $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8+8 = 0.$

Επομένως $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{B\Gamma}$ και αφού υπάρχει κοινό σημείο το *Β*, τότε τα σημεία *Α, Β, Γ* είναι συνευθειακά.

β) Είναι:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+(-4)^2} = \sqrt{2\cdot 16} = 4\sqrt{2}$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{2\cdot 4} = 2\sqrt{2}$.

Επομένως έχουμε ότι $|\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

<u>2ος τρόπος</u>:

Επειδή $\overrightarrow{AB} = (4,-4) = 2\cdot\ (2,-2) = 2\,\overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 2\,|\overrightarrow{B\Gamma}|$.

15854

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του μέτρου του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

15854-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα τότε $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$.

Άρα, $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (-4) - (-8) \cdot 1 = -8 + 8 = 0$, ισχύει.

β) Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ γίνεται

$\vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha}$.

γ) Παίρνουμε τα μέτρα στη σχέση του ερωτήματος β).

Άρα, $|\vec{\beta}| = |-4||\vec{\alpha}| = 4|\vec{\alpha}|$.

16147

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$.

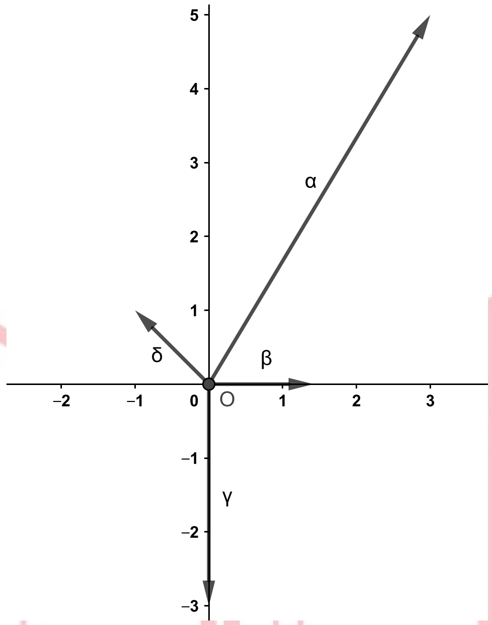
(Μονάδες 09)

β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Οx. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 06)

16147-Λύση

ΛΥΣΗ



Τα διανύσματα που δίνονται έχουν συντεταγμένες $\vec{\alpha} = (3\ ,\ 3\sqrt{3}\ )$, $\vec{\beta} = (\sqrt{2}\ ,\ 0)$, $\vec{\gamma} = (0\ ,-\ 3\ )$ και $\vec{\delta} = (-1\ ,\ 1)$.

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος, όταν η τετμημένη του δεν είναι μηδέν, ορίζεται ως το πηλίκο τεταγμένη του διανύσματος προς τετμημένη του διανύσματος. Οπότε

$\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$, $\lambda_{\vec{\delta}} = \frac{1}{-1} = -1$.

β) Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ένα διάνυσμα με το θετικό ημιάξονα Οx ισούται με το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με το θετικό ημιάξονα Οx, επειδή $\lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3}$ (από ερώτημα α), θα ισχύει εφω $= \sqrt{3}$. Επιπλέον το πέρας του διανύσματος βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο, αφού έχει θετικές συντεταγμένες, άρα ω = 60^{o}.

Το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{2}\ ,\ 0)$, έχει τεταγμένη 0, άρα $\vec{\beta}//x'x$, και επειδή το $\vec{\beta}$ έχει θετική τετμημένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Οx γωνία 0^{o}.

Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (0\ ,\ -3)$, έχει τετμημένη 0, άρα $\vec{\gamma}//y'y$, και επειδή το $\vec{\gamma}$ έχει αρνητική τεταγμένη σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα Οx γωνία 270^{o} .

Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Οx, επειδή $\lambda_{\vec{\delta}} = -1$ (από ερώτημα α), θα ισχύει εφφ = -1. Επιπλέον το διάνυσμα έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη, οπότε το πέρας του βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο, άρα φ = 145^{o}.

16147-Λύση

γ) $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{\gamma}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$.

16151

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3,3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα x΄x. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$. (Μονάδες 09)

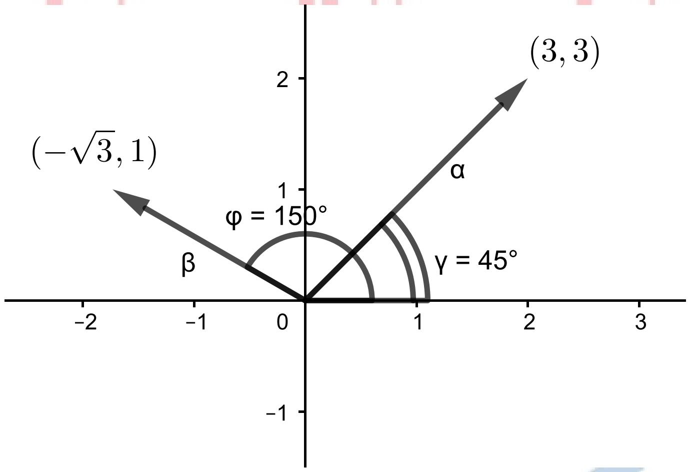
16151-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $\lambda_{\vec{\alpha}} = \frac{3}{3}$ =1 και $\lambda_{\vec{\beta}} = \frac{1}{-\sqrt{3}}$ = - $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x'x και φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x, τότε εφω=$\lambda_{\vec{\alpha}}$ = 1 και εφφ = $\lambda_{\vec{\beta}}$ = - $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ βρίσκεται στο 1^{o} τεταρτημόριο, άρα ω=45^{o} και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ βρίσκεται στο 2^{o} τεταρτημόριο, άρα φ=150^{o}.

β) Η γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ ισούται με τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x'x αν αφαιρέσουμε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον x'x.

Δηλαδή $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ = $150^{o} - 45^{o}$ =105^{o} .



16579

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 07)

β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 08)

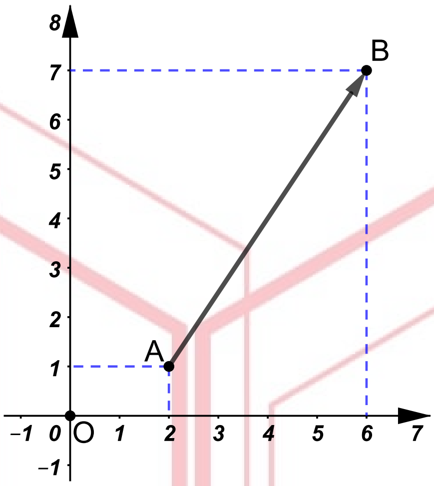
γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα.

(Μονάδες 10)

16579-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Σχεδιάζουμε τους άξονες του καρτεσιανού επιπέδου και τα δύο σημεία $A(2,1)$ και $B(6,7)$. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το Α και πέρας το Β.



β) $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_B - x_A,\ \ y_B - y_A) = (6-2, 7-1) = (4, 6)$.

γ) Παρατηρούμε ότι $\vec{u} = (-8, -12) = (-2 \cdot 4, -2 \cdot 6) = -2 \cdot (4, 6) = -2 \cdot \vec{v}$.

Εφόσον υπάρχει αρνητικός πραγματικός αριθμός $\lambda = -2$, ώστε $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$, τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα.

16580

ΘΕΜΑ 2

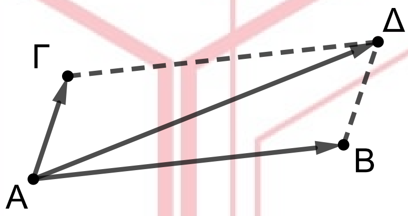
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 08)

γ) του σημείου Δ. (Μονάδες 05)



16580-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (11 - 2, 5 - 4) = (9, 1)$.

Όμοια:

$\overrightarrow{A\Gamma} = (x_\Gamma - x_A\,, y_\Gamma - y_A) = (3 - 2, 7 - 4) = (1, 3)$.

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

Άρα $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = (9 + 1, 1 + 3) = (10, 4)$.

γ) Έχουμε $\overrightarrow{A\Delta} = (x_\Delta - x_A\,, y_\Delta - y_A)$. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Α και τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$, η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$(10, 4) = (x_\Delta - 2\,, y_\Delta - 4) \text{ ή } \begin{cases} x_\Delta - 2 = 10 \\ y_\Delta - 4 = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_\Delta = 12 \\ y_\Delta = 8 \end{cases}$$

Άρα $\Delta(12, 8)$.

16581

ΘΕΜΑ 2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία *A*, *B* και *Γ* είναι συνευθειακά. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το *B* είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Μονάδες 07)

16581-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (1-(-1), 2-6) = (2,-4)$.

Επίσης $\overrightarrow{B\Gamma} = (x_\Gamma - x_B\,, y_\Gamma - y_B) = (3-1, -2-2) = (2,-4)$.

β) Από την απάντηση στο ερώτημα α) παρατηρούμε ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$. Επομένως τα διανύσματα είναι συγγραμμικά και εφόσον το B είναι κοινό σημείο συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ) Εφόσον $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$ συμπεραίνουμε ότι το Β είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ.

17070

ΘΕΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$.

α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ. (Μονάδες 8)

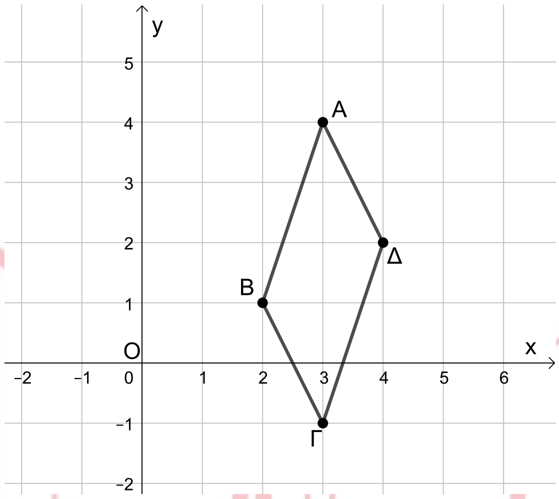
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

17070-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



β) Είναι $A(3,4)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,-1)$ και $\Delta(4,2)$, οπότε οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα είναι

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,, y_B - y_A) = (2-3,\ 1-4) = (-1,-3)\ ,$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (x_\Gamma - x_\Delta\,, y_\Gamma - y_\Delta) = (3-4\,, -1-2) = (-1\,,-3).$$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ θα έχουν ίσα μέτρα και θα είναι παράλληλα χωρίς να συμπίπτουν. Επομένως οι πλευρές AB και $\Delta\Gamma$ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ θα είναι ίσες και παράλληλες, οπότε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

17076

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(-3,-1)$, $B(0,3)$ και $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| \geq 5$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-3)^2} = 4$.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

17076-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A \, , y_M - y_A) = (x + 3 \, , y + 1) \, ,$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M \, , y_B - y_M) = (-x \, , 3 - y) \, ,$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A \, , y_B - y_A) = (3 \, , 4) \; .$$

β) Τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι αντίστοιχα

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} \, ,$$

$$\left|\overrightarrow{MB}\right| = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \, ,$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

γ) Για το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων ισχύει

$\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right| \leq \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$ ή $\left|\overrightarrow{AB}\right| \leq \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$ ή $5 \leq \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right|$, άρα

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| \geq 5.$$

δ) Από το γ) ερώτημα για οποιοδήποτε σημείο $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου ισχύει

$\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| \geq 5$, οπότε αντικαθιστώντας από το β) ερώτημα θα έχουμε

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geq 5 \, .$$

Οπότε δεν υπάρχει ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών ώστε να ισχύει

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4.$$

Επομένως ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

17077

ΘΕΜΑ 4

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda+1)\vec{i} + (\lambda+3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda-1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ. (Μονάδες 7)

γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)

δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.»

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

17077-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

$$= (\lambda + 1)\vec{\imath} + (\lambda + 3)\vec{\jmath} - 2\vec{\imath} - \lambda\vec{\jmath} = (\lambda + 1 - 2)\vec{\imath} + (\lambda + 3 - \lambda)\vec{\jmath} = (\lambda - 1)\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}.$$

β) Η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με

$$(AB) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 3^2} = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

γ) Είναι $(AB) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 16$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow (\lambda - 1 = 4 \text{ ή } \lambda - 1 = -4) \Leftrightarrow \lambda = 5 \text{ ή } \lambda = -3.$$

δ) Για κάθε πραγματικό αριθμό λ έχουμε

$(\lambda - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 + 9 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9} \geq \sqrt{9} \Leftrightarrow (AB) \geq 3,$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $(\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) > 3$.

Όταν $\lambda = 1$ η απόσταση των σημείων A και B είναι $(AB) = 3$ και αυτή είναι η μικρότερη δυνατή τιμή της.

(Άλλος τρόπος: Η απόσταση των σημείων A και B γράφεται:

$$(AB) = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 9} = \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 10},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

και παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή, όταν το τριώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda + 10$, παρουσιάζει ελάχιστο.

Αυτό συμβαίνει όταν $\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -2$ και $\gamma = 10$, οπότε το τριώνυμο

$\lambda^2 - 2\lambda + 10$, παρουσιάζει ελάχιστο για $\lambda = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$.)

Επομένως ο ισχυρισμός είναι αληθής.

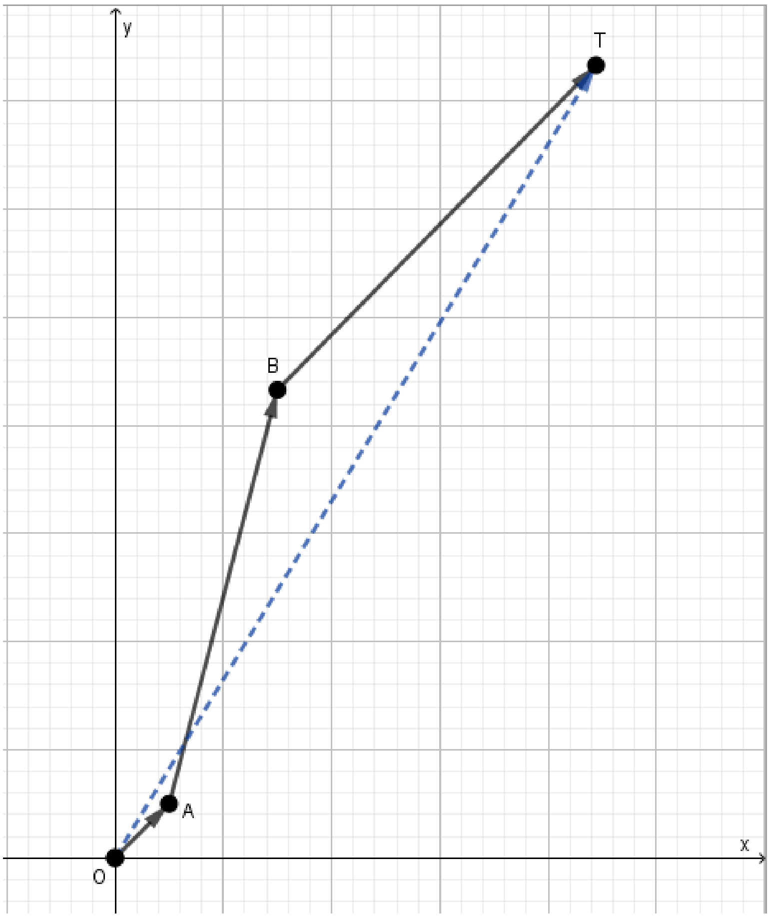
18878

ΘΕΜΑ 2

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρείς μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A, στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T. Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1,1), \quad \overrightarrow{AB} = (2,4), \quad \overrightarrow{BT} = \left(2, 5\sqrt{3} - 5\right),$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:



Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = \left(5, 5\sqrt{3}\right)$.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας.

(Μονάδες 12)

18878-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}$ είναι διαδοχικά, επομένως ισχύει:

$$\overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = (1, 1) + (2, 4) + \left(2, 5\sqrt{3} - 5\right) = \left(5, 5\sqrt{3}\right)$$

β) Η απόσταση $(O\Gamma)$ του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας δίνεται από το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{O\Gamma}$. Έτσι είναι:

$$\left|\overrightarrow{O\Gamma}\right| = \sqrt{5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10$$

Επομένως, η απόσταση από την κατασκήνωση είναι 10 km.

19038

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-5,-5)$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$.

(Μονάδες 8)

19038-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Για τη γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με τον άξονα x΄x είναι:

$$εφω = \frac{y_{\vec{\beta}}}{x_{\vec{\beta}}} = \frac{1}{-1} = -1$$

Αφού είναι $x_{\vec{\beta}} < 0$ και $y_{\vec{\beta}} > 0$, για τη γωνία ω θα ισχύει:

$$\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$$

Άρα, $\omega = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

β) Είναι:

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{x_{\vec{\gamma}}^2 + y_{\vec{\gamma}}^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{\beta}| = \sqrt{x_{\vec{\beta}}^2 + y_{\vec{\beta}}^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Επομένως, $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{\beta}|$.

γ) Ζητάμε τους πραγματικούς αριθμούς λ, μ για τους οποίους ισχύει η ισότητα:

$$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$(-5,-5) = \lambda(2,3) + \mu(-1,1)$$

$$(-5,-5) = (2\lambda-\mu, 3\lambda + \mu)$$

Επομένως, είναι:

$$2\lambda-\mu = -5 \quad (1) \quad \text{και} \quad 3\lambda + \mu = -5 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$5\lambda = -10 \text{ ή } \lambda = -2$$

Αντικαθιστούμε στην (2), οπότε:

$$3(-2) + \mu = -5 \text{ ή } \mu = -5 + 6 = 1$$

Άρα, το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ γράφεται ως εξής:

$$\vec{\gamma} = -2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

20938

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο ΟΑΒ, με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = (6,8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$

α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΟΑΓΒ να αποτελεί παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά ΟΑ με τη διαγώνιο ΑΒ του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ.

(Μονάδες 07)

20938-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $|\vec{\alpha}|^2 = (|\vec{\alpha}| - 4)^2 + (|\vec{\alpha}| - 2)^2 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 - 12|\vec{\alpha}| + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}| = 2$ ή $|\vec{\alpha}| = 10$.

Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ τότε $\vec{\alpha} = (-2,0)$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} = (-2,0)$ και $\overrightarrow{OB} = (6,8)$ δεν είναι παράλληλα (σχηματίζουν τρίγωνο), αφού $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$ επομένως η λύση είναι δεκτή.

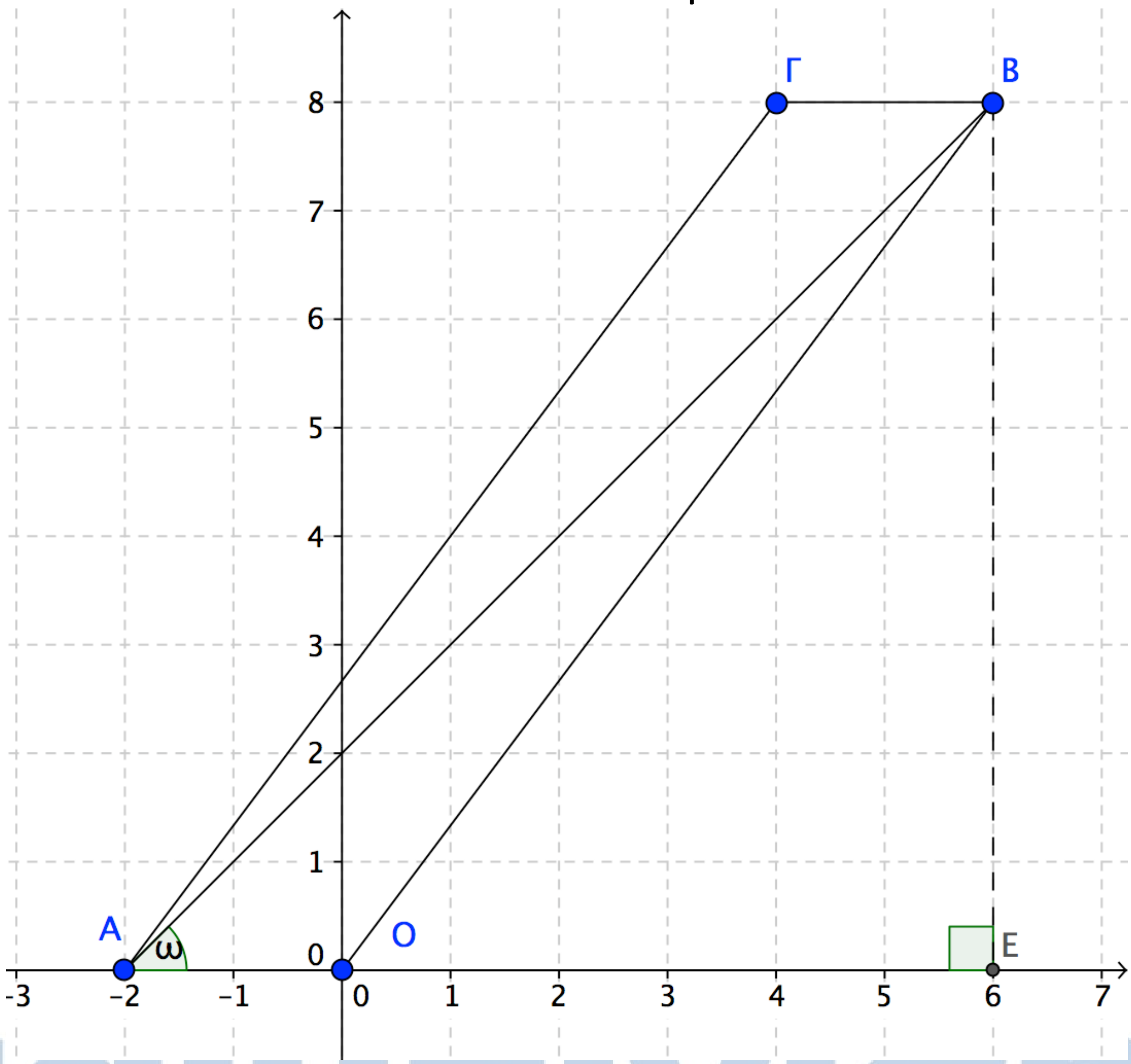
Αν $|\vec{\alpha}| = 10$, τότε $\vec{\alpha} = (6,8) = \overrightarrow{OB}$ επομένως τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ δεν σχηματίζουν τρίγωνο. Έτσι, η λύση αυτή απορρίπτεται.

β) Για να είναι το τετράπλευρο ΟΑΓΒ παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B\Gamma}$ (1). Αν $\Gamma(x, y)$ τότε η σχέση (1) γράφεται:

$(-2,0) = (x - 6, y - 8) \Leftrightarrow x - 6 = -2$ και $y - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ και $y = 8$, δηλαδή $\Gamma(4,8)$.

γ) Αρκεί να βρούμε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{AB}$.

20938-Λύση



Α΄ τρόπος:

Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ είναι $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (8, 8)$. Επίσης $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,0)$.

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, τότε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{16}{2\cdot 8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

Β΄ τρόπος:

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι, αν $\mathrm{E}(6,0)$ είναι η προβολή του σημείου B πάνω στον άξονα $\mathrm{x'x}$ τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} = \frac{8}{8} = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}.$$

21681

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2), B(-3, 4), \Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 7)

21681-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αν υποθέσουμε ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες (x, y), τότε είναι $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = (2-x,\ 5-y)$ και $\overrightarrow{AB} = (-3-1,\ 4-2) = (-4,\ 2)$, οπότε

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (2-x,\ 5-y) = (-4,\ 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=-4 \\ 5-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

β) Από την ισότητα $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$, προκύπτει ότι στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι απέναντι πλευρές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες και έχουν ίδιο μήκος, οπότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

γ) Το κέντρο Ο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και είναι το μέσο κάθε διαγωνίου. Το μέσο της ΑΓ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1+2}{2},\ \frac{2+5}{2}\right)$ οπότε το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι το σημείο $O\left(\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\right)$.

22038

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 1.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{\alpha}$ και να έχει μέτρο 7.

(Μονάδες 13)

22038-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Το διάνυσμα $\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$ είναι: i) ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ (αφού $\frac{1}{|\vec{\alpha}|} > 0$) και ii) μέτρου 1 (αφού $\left|\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right| = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}|} = 1$). Οπότε:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \frac{(5,-12)}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = \frac{(5,-12)}{\sqrt{169}} = \frac{(5,-12)}{13} = \left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right).$$

β) Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ του α) ερωτήματος με -7.

Δηλαδή, $\vec{\gamma} = -7\vec{\beta} = -7\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$=$\left(\frac{-35}{13}, \frac{84}{13}\right)$. Το πρόσημο «-» δίνει το αντίρροπο και ο παράγοντας 7 το επιθυμητό μέτρο, αφού $|\vec{\gamma}| = \left|-7\vec{\beta}\right| = |-7|\left|\vec{\beta}\right| = 7 \cdot 1 = 7$.

22044

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $Α(0,0)$, $Β(4,0)$ και $Γ(5,1)$.

α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία $Α, Β, Γ$.

(Μονάδες 10)

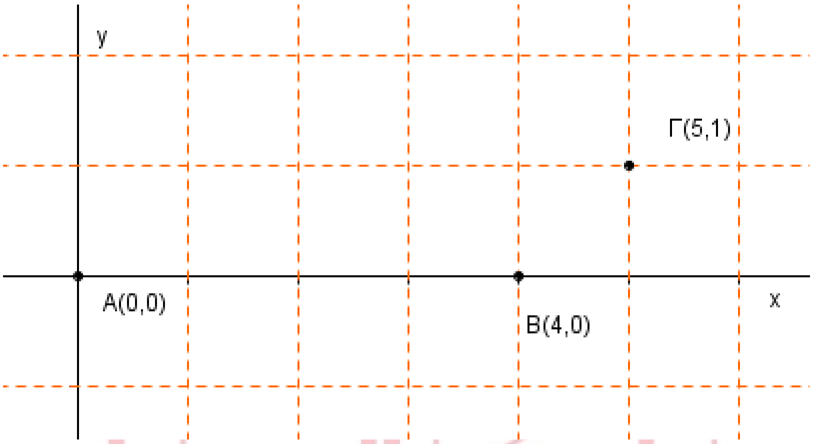
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου $Δ$ έτσι ώστε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 15)

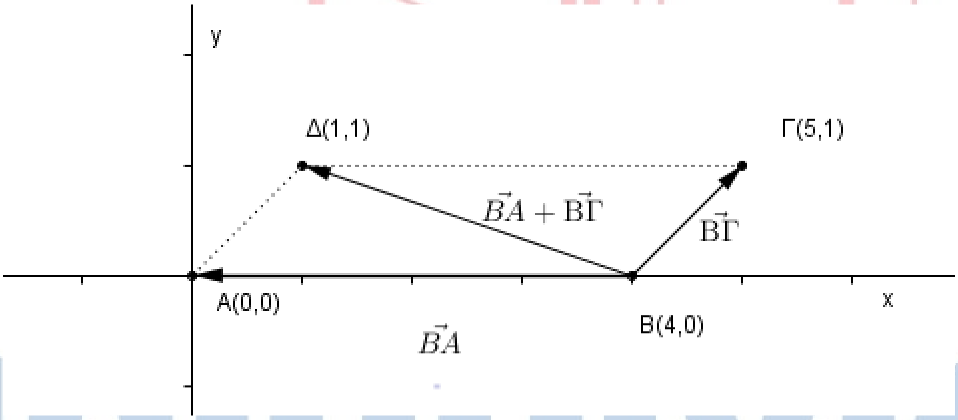
22044-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ σημειώνονται στο ακόλουθο σύστημα αξόνων:



β) Το ζητούμενο τέταρτο σημείο Δ ορίζεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, ως το πέρας του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ (βλέπε ακόλουθο σχήμα).



Όμως,

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(0-4,0-0)=(-4,0)$ και

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(5-4,1-0)=(1,1)$,

Άρα,

$\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}=(-4,0)+(1,1)=(-3,\ 1)$.

Συνεπώς,

$\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=(4,0)+(-3,1)=(1,1)$.

Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι το σημείο $\Delta(1,1)$.

22052

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,5)$ και $\vec{\beta}=(1,-3)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v}=(8,-21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Μονάδες 13)

22052-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα, αφού $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$.

β) Το διάνυσμα $\vec{v} = (8,-21)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αν και μόνον αν υπάρχουν αριθμοί λ, μ ώστε $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}$ ή ισοδύναμα,

$(8,-21) = \lambda(-2,5) + \mu(1,-3)$, δηλαδή

$$\begin{cases} 8 = -2\lambda + \mu \\ -21 = 5\lambda - 3\mu \end{cases}$$

το οποίο είναι 2x2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα λ, μ.

Το σύστημα, με την μέθοδο των οριζουσών, έχει μοναδική λύση:

$$\lambda = \frac{D_\lambda}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -21 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{1} = -3 \text{ και}$$

$$\mu = \frac{D_\mu}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & -21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Άρα,

$(8,-21) = -3(-2,5) + 2(1,-3)$.

22060

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(3,\ 0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}$, $\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ;

(Μονάδες 13)

22060-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{O\Delta}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,4) - (0,2) = (3-0, 4-2) = (3,2)$.

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (6,2) - (3,0) = (6-3, 2-0) = (3,2)$.

Άρα, $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

Επίσης, $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0,2) - (3,0) = (-3,2)$.

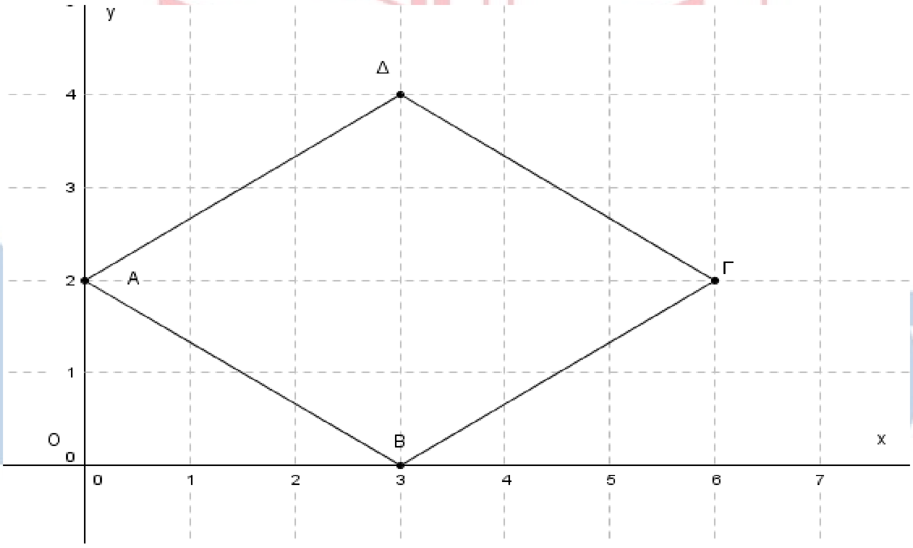
β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (-3,2)$. Οπότε $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Επίσης,

$\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (6,2) - (3,0) = (3,2)$, οπότε $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Άρα, $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}|$.

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος καθώς η συνθήκη $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ συνεπάγει ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, ενώ η συνθήκη $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}|$ βεβαιώνει ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος (τα μήκη δύο διαδοχικών πλευρών είναι ίσα).



22557

ΘΕΜΑ 2

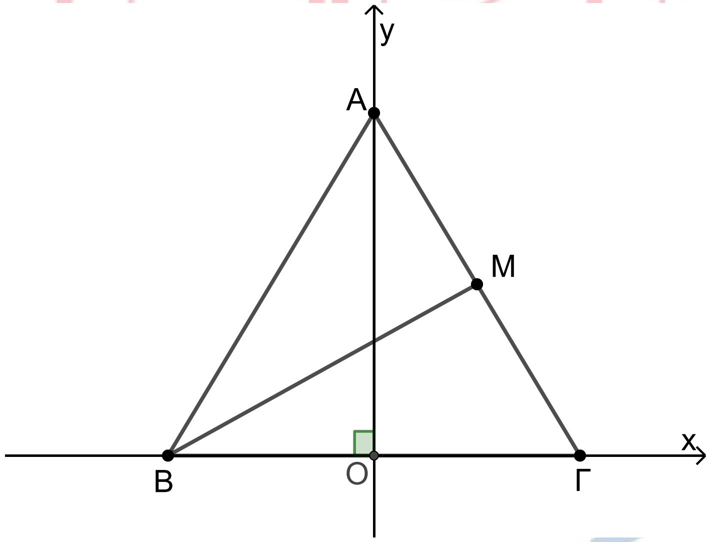
Το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχει βάση $ΒΓ$ και ύψος $ΑΟ$. Η κορυφή $Α$ είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές $Β$ και $Γ$ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(ΒΓ) = 12$, $(ΑΟ) = 8$ και $Μ$ το μέσο της πλευράς $ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $Α(0\,,8)$, $Β(-6\,,0)$ και $Γ(6\,,0)$. (Μονάδες 9)

ii. $Μ(3\,,4)$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου $ΒΜ$. (Μονάδες 7)



22557-Λύση

ΛΥΣΗ

α) i) Επειδή το A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και $(OA) = 8$ θα είναι $y_A = 8$, επομένως $A(0\,,8)$.

Το O είναι το μέσο του $ΒΓ$ και τα $Β$ και $Γ$ είναι σημεία του αρνητικού και του θετικού ημιάξονα των x , αντίστοιχα.

Επειδή $(ΒΓ) = 12$, θα είναι $|x_B| = |x_Γ| = \frac{(ΒΓ)}{2} = \frac{12}{2} = 6$, επομένως $Β(-6\,,0)$ και $Γ(6\,,0)$.

ii) Οι συντεταγμένες του μέσου $Μ$ της πλευράς $ΑΓ$ είναι:

$x_M = \frac{x_A + x_Γ}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$,

$y_M = \frac{y_A + y_Γ}{2} = \frac{8+0}{2} = 4$,

άρα $Μ(3\,,4)$.

β) Το μήκος της διαμέσου $ΒΜ$ είναι

$(ΒΜ) = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2} = \sqrt{(3+6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{97}$.