15010

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του επιπέδου $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ και τα διανύσματα $\vec{\mathrm{B}\Delta}$ και $\vec{\Gamma\mathrm{E}}$ τέτοια ώστε $\vec{\mathrm{B}\Delta} = \vec{\mathrm{BA}} + \vec{\mathrm{B}\Gamma}$ και $\vec{\Gamma\mathrm{E}} = \vec{\Gamma\mathrm{A}} + \vec{\Gamma\mathrm{B}}$.

α)

i. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ και $\vec{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\mathrm{A}\Delta}$ και $\vec{\mathrm{AE}}$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 8)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί τα σημεία A, Δ και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

15010-Λύση

ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$ (1)

και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma E}}=\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}+\left(\overrightarrow{\mathrm{\Gamma A}}+\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}\right)=\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$ (2).

ii. Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=-\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ είναι αντίθετα.

β) Από το α) ερώτημα είναι $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}=(-1)\overrightarrow{\mathrm{AE}}$, οπότε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ είναι παράλληλα. Επιπλέον έχουν κοινό σημείο το A, άρα τα A,Δ και E είναι συνευθειακά.

20914

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων.

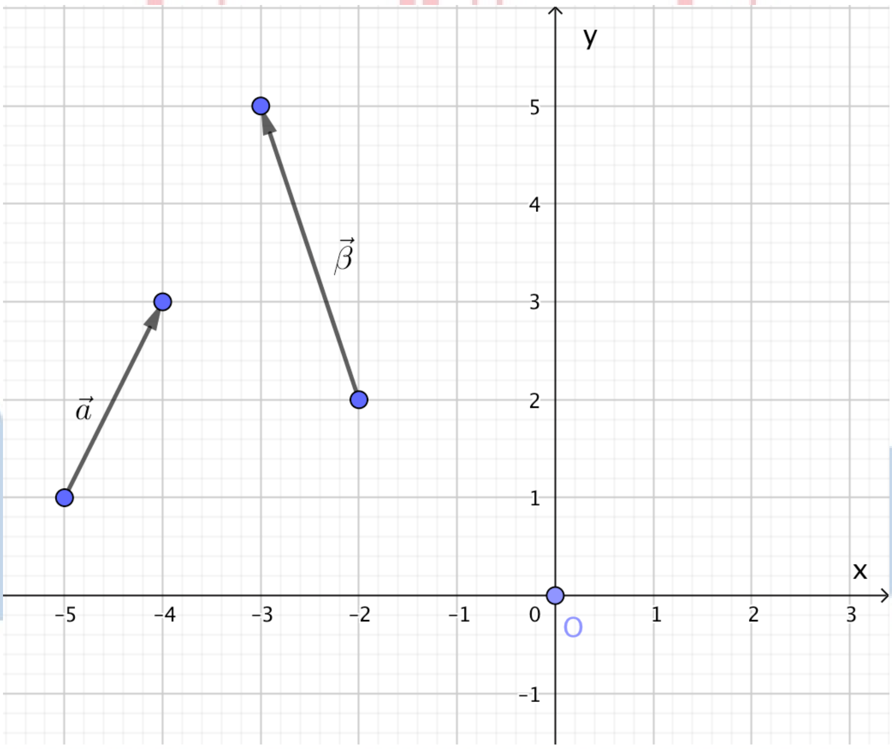
(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

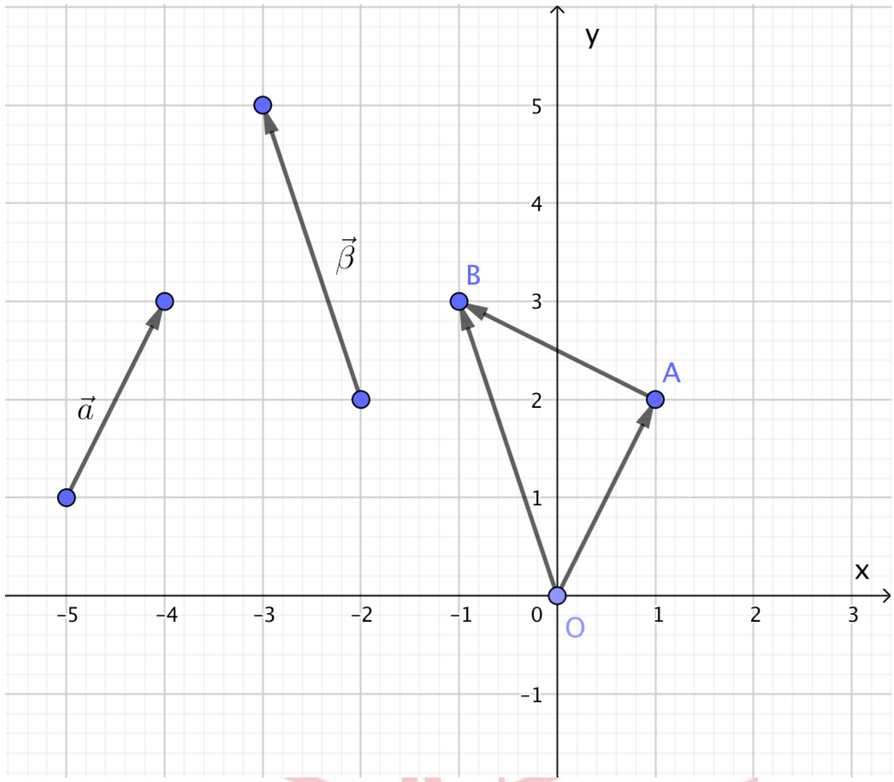
(Μονάδες 08)



20914-Λύση

ΛΥΣΗ

α)



β) Από το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA} = (1,2)$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB} = (-1,3)$ και $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,3) - (1,2) = (-2,1)$.

γ) Έχουμε: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = (1,2) \cdot (-2,1) = 0$, επομένως $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

Επομένως το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.

21885

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ,Ε σημεία εσωτερικά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΑΒ}=κ\cdot\overrightarrow{ΑΔ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}=λ\cdot\overrightarrow{ΑΕ}$, όπου κ και λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\overrightarrow{ΑΒ}=\vec{α}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}=\vec{β}$,τότε:

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

(Μονάδες 8)

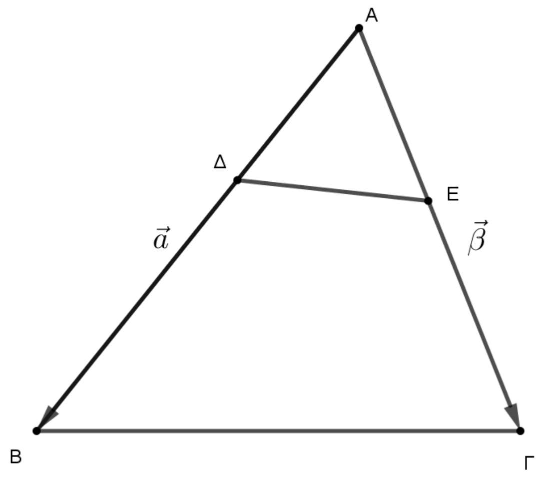
β)

i. Αν κ=λ , να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΓ} \parallel \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = κ|\overrightarrow{ΔΕ}|$. (Μονάδες 10)

ii. Αν κ=λ=2, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$ και να διατυπώσετε λεκτικά ποιο γνωστό θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 7)

21885-Λύση

ΛΥΣΗ



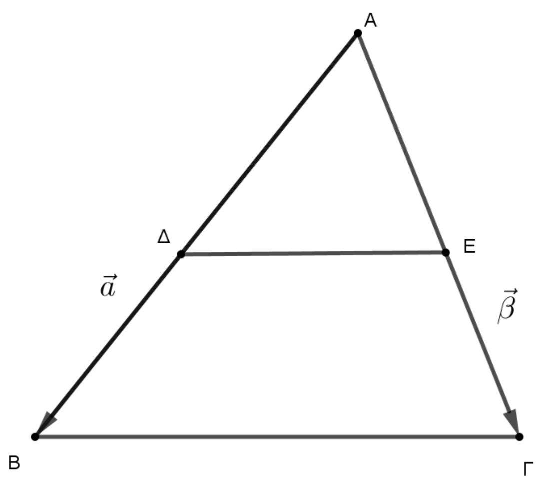
α) Είναι $\overrightarrow{ΔΕ} = \overrightarrow{ΔΑ} + \overrightarrow{ΑΕ} = -\frac{1}{κ}\cdot\vec{α} + \frac{1}{λ}\cdot\vec{β}$

$\overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΓ} = -\vec{α} + \vec{β}$

β)

i. Αν κ=λ τότε $\overrightarrow{ΒΓ} = = -\vec{α} + \vec{β} = κ(-\frac{1}{κ}\vec{α} + \frac{1}{κ}\vec{β}) = κ\cdot\overrightarrow{ΔΕ}$ άρα $\overrightarrow{ΒΓ} // \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = κ\cdot|\overrightarrow{ΔΕ}|$

ii.

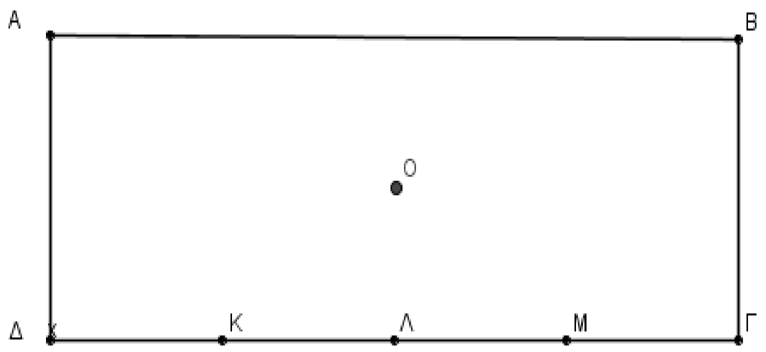


Αν κ=λ=2 τότε τα σημεία Δ και Ε είναι μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα , οπότε $\overrightarrow{ΒΓ} // \overrightarrow{ΔΕ}$ και $|\overrightarrow{ΒΓ}| = 2\cdot|\overrightarrow{ΔΕ}|$, επομένως ΔΕ//ΒΓ και ΒΓ=2·ΔΕ. Αποδείξαμε δηλαδή ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της τρίτης πλευράς.

22042

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Τα σημεία Κ, Λ, Μ χωρίζουν την πλευρά ΔΓ σε τέσσερα ίσα τμήματα.



Αν $\overrightarrow{\Delta K} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta A} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε καθένα από τα ακόλουθα διανύσματα ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) $\overrightarrow{\Delta \Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{MA}$

(Μονάδες 8)

γ) $\overrightarrow{O\Delta}$

(Μονάδες 9)

22042-Λύση

ΛΥΣΗ

α) $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 4\overrightarrow{\Delta K} = 4\vec{\alpha}$.

β) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} = -3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

γ) $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{O\Lambda} + \overrightarrow{\Lambda\Delta} = -\frac{1}{2}\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$.