21165

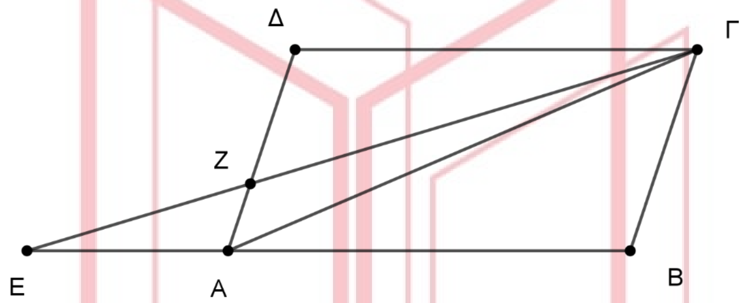
ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και έστω $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Delta}} = \vec{\beta}$. Τα σημεία Ε και Ζ είναι τέτοια ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{EZ}} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{3} \cdot \vec{\beta}$ και $\overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}} = \vec{\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{Z\Gamma}}=2\overrightarrow{\mathrm{EZ}}$. (Μονάδες 9)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



21165-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Αφού είναι $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{AZ}$ γράφονται:

$$\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha} \text{ και } \overrightarrow{AZ}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}.$$

τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}-\left(-\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta} \text{ και}$$

$$\overrightarrow{Z\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AZ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AZ}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$$

β) Επειδή $\overrightarrow{EZ}=\frac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}$ έχουμε ότι:

$$\overrightarrow{Z\Gamma}=\vec{\alpha}+\frac{2}{3}\cdot\vec{\beta}=2\left(\frac{1}{2}\vec{\alpha}+\frac{1}{3}\cdot\vec{\beta}\right)=2\overrightarrow{EZ} \text{ ή } \overrightarrow{Z\Gamma}=2\overrightarrow{EZ}.$$

γ) Επειδή είναι $\overrightarrow{Z\Gamma}//\overrightarrow{EZ}$ και τα διανύσματα έχουν κοινό άκρο το σημείο Ζ έχουμε το συμπέρασμα ότι τα σημεία Ζ, Ε και Γ είναι συνευθειακά.

22055

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{B'A'}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A'\Gamma'}}$.

α) Να εξηγήσετε γιατί:

(i) το μήκος της πλευράς ΒΑ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Β΄Α΄ και

(Μονάδες 3)

(ii) το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Α΄Γ΄.

(Μονάδες 3)

β) i.Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{B'\Gamma'}}$.

(Μονάδες 10)

ii. Να εξηγήσετε γιατί το μήκος της πλευράς ΒΓ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς Β΄Γ΄.

(Μονάδες 3)

γ) Θα μπορούσε η ακόλουθη πρόταση να ήταν κριτήριο ισότητας τριγώνων;

«Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{B'A'}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A'\Gamma'}}$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

22055-Λύση

ΛΥΣΗ

α) Από την υπόθεση έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{B'A'}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A'\Gamma'}}$. Όμως, ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, άρα

(i) το μήκος της πλευράς BA είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $\mathrm{B'A'}$ και

(ii) το μήκος της πλευράς $\mathrm{A\Gamma}$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $\mathrm{A'\Gamma'}$.

β) i. Από την υπόθεση έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{B'A'}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{A'\Gamma'}}$. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{B'A'}} + \overrightarrow{\mathrm{A'\Gamma'}}$ δηλαδή $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{B'\Gamma'}}$.

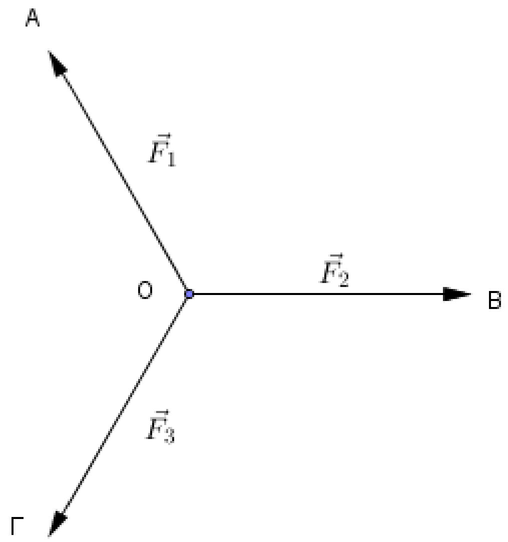
ii. Από το β)i ερώτημα έχουμε $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{B'\Gamma'}}$. Όμως, ίσα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, άρα το μήκος της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ είναι ίσο με το μήκος της πλευράς $\mathrm{B'\Gamma'}$.

γ) Ναι, αφού, από τα ερωτήματα α) και β), τα δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές τους μία προς μία ίσες (τα μήκη τους) και συνεπώς, από το κριτήριο ΠΠΠ, τα τρίγωνα θα είναι ίσα.

22068

ΘΕΜΑ 4

Σε ένα υλικό σημείο O εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις $\overrightarrow{\mathrm{F}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{F}_2},\ \overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ οι οποίες σχηματίζουν ανά δύο γωνία 120^{o}, έτσι ώστε το υλικό σημείο O να ισορροπεί.



α) Ποια σχέση ανάμεσα στα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{F}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{F}_2},\ \overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ εκφράζει την συνθήκη ισορροπίας;

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{F}_1}+\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$ και $\overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ είναι αντίθετα.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ είναι τα πέρατα των διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{F}_1},\ \overrightarrow{\mathrm{F}_2},\ \overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ και $\overrightarrow{\mathrm{F}_1}+\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$, αντίστοιχα (θεωρούμενων ως διανυσμάτων με αρχή το σημείο O), τότε να αποδείξετε ότι:

i. $\widehat{\mathrm{A}\mathrm{O}\Delta}=\widehat{\mathrm{B}\mathrm{O}\Delta}=60^{\mathrm{o}}$.

(Μονάδες 5)

ii. $\widehat{\mathrm{O}\Delta\mathrm{B}}=60^{\mathrm{o}}$.

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι: $|\overrightarrow{\mathrm{F}_1}|=|\overrightarrow{\mathrm{F}_2}|=|\overrightarrow{\mathrm{F}_3}|$.

(Μονάδες 5)

22068-Λύση

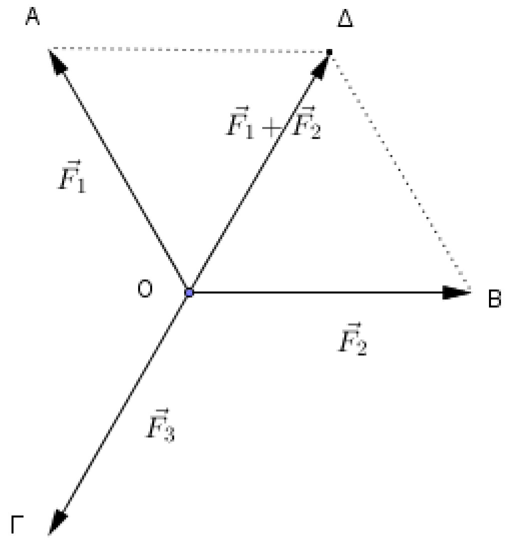
ΛΥΣΗ

α) Η συνθήκη ισορροπίας εκφράζεται από την διανυσματική ισότητα: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$.

β) Από το α) ερώτημα έχουμε $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$, οπότε $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=-\overrightarrow{F_3}$. Άρα, τα διανύσματα $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ και $\overrightarrow{F_3}$ είναι αντίθετα.

γ)

i. Από το β) ερώτημα, τα σημεία $\Gamma, \mathrm{O}, \Delta$ είναι συνευθειακά. Οπότε, οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}\mathrm{O}\Delta}$ και $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{O}\Delta}$ είναι 60^{o}, ως παραπληρωματικές των γωνιών $\widehat{\mathrm{A}\mathrm{O}\Gamma}$, $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{O}\Gamma}$, αντίστοιχα, που εξ υποθέσεως είναι ίσες με 120^{o} η κάθε μία.



ii. Από τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος δύο διανυσμάτων, το τετράπλευρο $\mathrm{OA}\Delta\mathrm{B}$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}\mathrm{O}\Delta}$ και $\widehat{\mathrm{O}\Delta\mathrm{B}}$ είναι ίσες, ως εντός εναλλάξ και άρα, από το γi ερώτημα, έχουμε $\widehat{\mathrm{O}\Delta\mathrm{B}}=60^{o}$.

δ) Από το ερώτημα γ), έπεται ότι το τρίγωνο $\mathrm{OB}\Delta$ είναι ισόπλευρο, καθώς $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{O}\Delta}=\widehat{\mathrm{O}\Delta\mathrm{B}}=60^{o}$, οπότε και η τρίτη του γωνία $\widehat{\mathrm{OB}\Delta}$ αναγκαστικά θα είναι 60^{o} (μια και το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180^{o}). Συνεπώς, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}|=|\overrightarrow{\mathrm{O}\Delta}|$, δηλαδή $|\overrightarrow{F_2}|=|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}|$. Όμως, από το β) ερώτημα, $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=-\overrightarrow{F_3}$. Επομένως, $|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_2}|=|-\overrightarrow{F_3}|$, ή ισοδύναμα $|\overrightarrow{F_1}|=|\overrightarrow{F_2}|=|\overrightarrow{F_3}|$.